

МОДЕЛИРАНЕ И СИМУЛИРАНЕ НА ФИЛТЪР НА КАЛМАН С ПОМОЩТА НА МАТЛАБ.

Борислав Георгиев

ТУ-Габрово, ул.Хаджи Димитър 4, Габрово, България,
bgeorgiev@tugab.bg

MODELING AND SIMULATING A KALMAN FILTER USING MATLAB.

Borislav Georgiev

TU-Gabrovo, str. Hadji Dimitar 4, Gabrovo, Bulgaria.
bgeorgiev@tugab.bg

Abstract

Kalman filtering is a powerful state estimation technique widely used in various fields such as signal processing, autonomous control of vehicles, and computer systems. It provides an optimal estimation of the state of a system from indirect and uncertain measurements by recursively predicting and updating the state based on a mathematical model and new measurements. This method is particularly effective in environments with noise and uncertainty, making it invaluable for applications like spacecraft navigation, robotics, and wireless sensor networks. By simulating different scenarios, we can evaluate the performance of the Kalman filter under various conditions, such as different noise levels or system dynamics. This helps in understanding its robustness and limitations.

Keywords: Kalman filter, state estimation, design a Kalman filter.

ВЪВЕДЕНИЕ

Филтърът на Калман е мощен инструмент за филтриране на шума от измервания и за оценка на състоянието на системи. Основните стъпки за използването му са:

Моделиране на системата: Определяне математическия модел [3, 4] на системата, който включва динамичните уравнения и уравненията за измерване. Обикновено се използват линейни модели, но съществуват и разширени версии за нелинейни системи.

Инициализация: Задаваме началните условия, включително началната оценка на състоянието и ковариационната матрица на грешката.

Предсказване: Използваме динамичния модел на системата, за да предскажем следващото състояние и ковариацията на грешката.

Актуализация: Когато се получи ново измерване, актуализираме оценката на състоянието и ковариацията на грешката, като използваме измервателния модел и новите данни.

Повторение: Повтаряме стъпките за предсказване и актуализация за всяко ново измерване.

Филтърът на Калман е рекурсивен, което означава, че използва само текущото измерване и предишната оценка, за да изчисли новата оценка, което го прави ефективен за приложения в реално време.

Изборът на подходящи параметри за филтъра на Калман е критичен за неговата ефективност. Трябва да се уверим, че математическият модел на системата е точен. Това включва динамичния модел и модела на измерване. Неточностите в модела могат да доведат до грешки в оценките.

Трябва да изберем разумни начални условия за състоянието и ковариационната матрица на грешката. Ако нямаме точна информация, можем да използваме предположения, но е важно да ги актуализираме с времето.

Ковариационната матрица на процеса (Q) отразява несигурността в модела на системата. Ако системата е стабилна и предсказуема, стойностите в Q могат да бъдат по-малки. Ако има много несигурност, стойностите трябва да бъдат по-големи.

Ковариационната матрица на измерването (R) отразява несигурността в измерванията. Ако измерванията са точни, стойностите в R могат да бъдат по-малки. Ако има много шум в измерванията, стойностите трябва да бъдат по-големи.

В някои случаи [1, 2] може да се наложи адаптивен филтър на Калман, който автоматично настройва параметрите Q и R в зависимост от текущите условия.

Желателно е използването на симулации и реални данни, за да тестваме и валидираме настройките на филтъра. Това ще ни помогне да открием и коригираме потенциални проблеми.

I. МОДЕЛИРАНЕ

Сигналите, които са точно определени или детерминирани се описват от функции в обичайния математически смисъл, така се изчислява времето на протичане на процеса и съответстващата му стойност. Не е трудно да напишем математическата връзка между времето и стойността на функцията. Всичко това е необходимо за да знаем, че съществува съответната функционална връзка.

Белият шум се определя от случаен стационарен процес, който има постоянна плътност на разпределение. Понякога той се характеризира, като шум, който „подскача“ безкрайно далече и безкрайно бързо. Това няма физически смисъл, но е подходяща абстракция. Характерно е че всички физични системи са ограничени до някаква степен и ограничените системи довеждат до процес, който има крайни променливи съдържащи бял шум.

Ако белият шум е с нормално разпределение, резултатът също ще има нормално разпределение и обединяването на входните данни ще бъде линейна операция. Търси се линеен филтър, чиято спектрална характеристика на комбинацията от сигнал и шум, трябва да осигури най – доброто им разделение, т.е. с най – малка средна квадратна грешка.

Нека разгледаме следната дискретна система с гаусов шум w на входа и измервателен шум v на изхода:

$$\begin{aligned}x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n] + Gw[n] \\y[n] &= Cx[n] + Du[n] + Hu[n] + v[n]\end{aligned}\quad (1)$$

Целта е да се проектира филтър на Калман, който да оцени истинската производителност на системата $y_t[n] = y[n] - v[n]$ въз основа на измерванията на шума $y[n]$. Този стационарен филтър на Калман използва следните уравнения за тази оценка.

Актуализация на времето:

$$\hat{x}[n+1|n] = A\hat{x}[n|n-1] + Bu[n] + Gw[n] \quad (2)$$

Актуализация на измерването:

$$\begin{aligned}\hat{x}[n|n] &= \hat{x}[n|n-1] \\&+ M_x(y[n] - C\hat{x}[n|n-1] - Du[n])\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[n|n] &= C\hat{x}[n|n-1] + Du[n] \\&+ M_y(y[n] - C\hat{x}[n|n-1] - Du[n])\end{aligned}\quad (4)$$

II. СИМУЛАЦИЯ НА СИСТЕМАТА

Тази симулация показва как да настроим шума от процеса и шума от измерването на филтър на Калман с постоянна скорост[5].

Модел на движение

Филтърът на Калман оценява състоянието на физически обект чрез обработката на набор от измервания с шум и сравнява измерванията с модел на движение.

Като идеализирано представяне на истинското движение на обекта, моделът на движение се изразява като функция на времето и набор от променливи, наречени състояние. Филтърът обикновено записва състоянието под формата на вектор, наречен вектор на състоянието.

Този случай показва един от най-простите модели на движение, модел на движение с постоянна скорост в две измерения. Моделът на движение с постоянна скорост предполага, че обектът се движи с почти постоянна скорост. Векторът на състоянието се състои от четири параметъра, които представляват позицията и скоростта в x - и y - измеренията.

Има и други модели на движение, например постоянен завой, който предполага, че обектът се движи предимно по кръгова дъга с постоянна скорост. Посложните модели, като постоянното ускорение, помагат, когато даден обект се движи за значителна продължителност от време според модела. Независимо от това, много прост модел на движение като модела с постоянна скорост може да се използва успешно за проследяване на обект, който постепенно променя посоката или скоростта си с течение на времето. Филтърът на Калман постига тази гъвкавост чрез предоставяне на допълнителен параметър, наречен процесен шум.

В действителност обектите не следват точно определен модел на движение.

Следователно, когато филтър на Калман оценява движението на обект, той трябва да отчете неизвестни отклонения от модела на движение. Терминът „процесен шум“ се използва, за да опише степента на отклонение или несигурност на истинското движение на обекта от избрания модел на движение. Без шум от процеса филтърът на Калман с модел на движение с постоянна скорост пасва на една права линия за всички измервания.

С процесния шум филтърът на Калман може да даде на по-новите измервания по-голяма тежест от по-старите измервания, което позволява промяна в посоката или скоростта. Докато „шум“ и „несигурност“ са термини, които означават идеята за хаотично отклонение от модела, процесният шум може също да позволи малки, предвидими промени в истинското движение на обект, което иначе би изисквало значително по-сложни модели на движение.

Тази симулация показва автомобил, който се движи по криволинеен път с профил на относително постоянна скорост и използва модел на движение с постоянна скорост с малко количество шум от процеса, за да отчете малките отклонения, дължащи се на промени в управлението и скоростта. Шумът от процеса позволява на филтъра да отчете малки промени в скоростта или посоката, без да оценява колко бързо ускорява или завива автомобилът. Ако изследвате траекторията на кола за кратък период от време, може да забележите, че тя върви почти направо. Само за по-големи периоди от време можете да наблюдавате промяната в посоката на движение на автомобила.

Процесният шум има присъщ компромис. Ниският шум от процеса може да накара филтъра да игнорира бързите отклонения от истинската траектория и вместо това да благоприятства модела на движение. Това ограничава степента на отклонение от модела на движение, кое-

то истинската траектория може да има във всеки конкретен момент. Високият процесен шум допуска по-големи локални отклонения от модела на движение, но прави филтъра твърде чувствителен към шумни измервания.

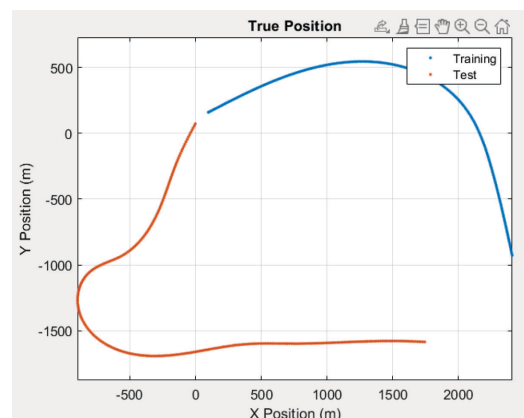
Филтрите на Калман също моделират „шум от измерване“, който помага да се информира филтърът колко трябва да претегли новите измервания спрямо текущия модел на движение.

Задаването на висок шум при измерване показва, че измерванията са неточни и кара филтъра да предпочита съществуващия модел на движение и да реагира по-бавно на отклонения от модела на движение.

Съотношението между шума от процеса и шума от измерването определя дали филтърът следва по-близо до модела на движение, ако шумът от процеса е по-малък, или по-близо до измерванията, ако шумът от измерването е по-малък.

Един прост подход за настройка на филтър на Калман е да се използват измервания с известна основна истина и да се коригира измерването и шума от процеса на филтъра.

Филтър за постоянна скорост, настроен да следва обект, който има постоянна скорост и се върти много бавно на голямо разстояние, може да не работи добре, когато оценява обект, който забавя или се върти бързо. Следователно е важно да настроим филтъра за целия диапазон от типове движение, които очакваме да филтрира. Също така е важно да вземем предвид очакваното количество шум от измерването. Ако настроим филтъра с помощта на измервания с нисък шум, филтърът може да проследява по-добре промените в модела на движение. Въпреки това, ако използваме същия настроен филтър за проследяване на обект, измерен в среда с по-висок шум, получената следа може да бъде неоправдано повлияна от отклонения.



Фиг. 1. Тренировъчни и тестови траектории преди настройка на филтъра.

Използваният код генерира тренировъчна траектория (фиг.1), която моделира пътя на превозно средство, движещо се с 30 m/s по магистрала. Той също така генерира тестова траектория за превозно средство, което има подобна скорост и следва магистрала с подобна вариация на кривината.

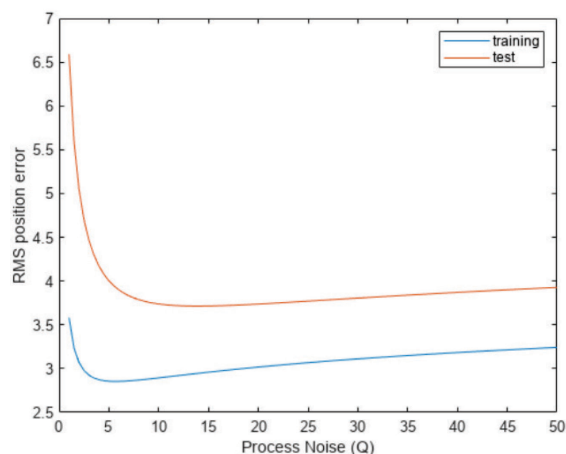
В този случай имаме измервания само на позицията на превозните средства. Моделът на движение с постоянна скорост, '2D Constant Velocity', има вектор на състоянието от формата: $[px; vx; py; vy]$, където px и py са съответно позициите в посоките x и y ; и vx и vy са скоростите съответно в посоките x и y .

Тъй като истината е известна както за тренировъчните, така и за тестовите данни, можем директно да симулираме измерванията. Получаваме измерването на позицията чрез предварително умножаване на вектора на състоянието по свойството `MeasurementModel` на филтъра. Свойството `MeasurementModel`, посочено като матрица, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, съответства на измервания само за позиция, затова добавяме шума от измерване към тези измервания на позицията.

Сега филтърът може да бъде конструиран и настроен с помощта на данните за обучение и оценен с помощта на данните от теста.

Вариациите в оптималната точка са очаквани (фиг.2) и се дължат на разликите в траекториите. При малки разлики в

скоростта и повече завои се очаква тестовият комплект да има по-голяма прогнозирана грешка. Често срещан начин за смекчаване на разликите между тренировъчни и тестови данни е използването на симулация Монте Карло, включваща много тренировъчни траектории като тестовите траектории.



Фиг. 2. Тренировъчни и тестови траектории след настройка на филтъра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Симулацията на Калман филтъра може да бъде изключително полезна.

Симулациите помагат да се визуализира как филтърът на Калман обработва данни, прогнозира състояния и актуализира оценки. Това може да направи основните математически концепции по-интуитивни и по-лесни за разбиране.

Чрез симулиране на различни сценарии можете да оцените производителността на филтъра на Калман при различни условия, като различни нива на шум или динамика на системата. Това помага за разбирането на неговата устойчивост и ограничения.

Симулациите ни позволяват да експериментираме с различни параметри на филтъра на Калман, като шум от процеса и ковариации на шума от измерване. Това помага за фина настройка на филтъра и за оптимална производителност в приложения от реалния свят.

Преди внедряването на филтър на Калман в реална система, могат да се из-

ползват симулации за тестване и валидиране на неговото изпълнение. Това гарантира, че филтърът ще работи правилно и ефективно, когато се прилага към действителни данни.

Това изследване е финансирано от Европейския фонд за регионално развитие в рамките на ОП „Научни изследвания, иновации и дигитализация за интелигентна трансформация“ 2021-2027 г., Проект BG16RFPR002-1.014-0005 Център за компетентност „Интелигентни мехатронни, еко- и енергоспестяващи системи и технологии“.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Komarski, D., Diakov, D., Nikolov, R., Analysis of the Transfer Curve and the Center of Rotation of Elastic Micro-Positioning Module with Optimized Butterfly Flexures, (2022) 32nd International Scientific Symposium Metrology and Metrology Assurance, MMA 2022, DOI: 10.1109/MMA55579.2022.9993338
- [2] Diakov, D., Komarski, D., Nikolova, H., Optimization of Butterfly Flexures for Angular Positioning(2021) 31st International Scientific Symposium Metrology and Metrology Assurance, MMA 2021, DOI: 10.1109/MMA52675.2021.9610833
- [3] Diakov, D., Komarski, D., Micro-positioning Module for Angular Orientation Position of the Axis of Rotation Analysis, (2021) 31st International Scientific Symposium Metrology and Metrology Assurance, MMA 2021, DOI: 10.1109/MMA52675.2021.9610873
- [4] Komarski D., Diakov D., Nikolova H., Vassilev V., Analysis of the Impact of the Central Connecting Element Stiffness on the Accuracy Characteristics of Micro-Positioning Elastic Module with 'Butterfly' Flexures, 33rd International Scientific Symposium Metrology and Metrology

Assurance, MMA 2023, (2023), DOI:
10.1109/MMA59144.2023.10317907

[5] Eric Peasley, An Introduction to Using
Simulink Department of Engineering
Science, University of Oxford, Adapted and

updated by Dr I. F. Mear using MATLAB
2017b and MATLAB 2018b

© 1994-2023 The MathWorks, Inc.