

ПРОЕКТИРАНЕ НА СИНХРОНИЗАЦИОННА СИСТЕМА С АНТИ-СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕЖДУ ДВЕ ХАОТИЧНИ СИСТЕМИ С ЕДНА НЕЛИНЕЙНОСТ

Драгомир Чантов

Технически университет - Габрово, ул. "Х. Димитър" 4, Габрово, България

**кореспондиращ автор: dchantov@tugab.bg*

DESIGN OF SYNCHRONIZATION SYSTEM WITH ANTI-SYNCHRONIZATION BETWEEN TWO CHAOTIC SYSTEMS WITH ONE NONLINEARITY

Dragomir Chantov

Technical university of Gabrovo, 4 H. Dimitar Str., Gabrovo, Bulgaria

**Corresponding author: dchantov@tugab.bg*

Abstract

The topic of chaotic anti-synchronization as a subtype of the chaotic synchronization phenomenon is studied in this paper. By this type of synchronization, the aim is to design such a coupling between two chaotic systems, that the slave system to run in a "mirror"-like chaotic mode to the master system, i.e. the error functions, which must decline to zero to achieve anti-synchronization, are defined as sums, not differences, of the corresponding pairs of variables of the two systems. The second Lyapunov stability law is used to define the control functions.

Keywords: chaos; chaotic anti-synchronization, Lyapunov stability.

ВЪВЕДЕНИЕ

Едно от съвременните направления в теорията на автоматичното управление и по-конкретно в частта ѝ за анализ и синтез на нелинейни системи е управление то на хаотични системи. Тази категория задачи включва задачи за стабилизация на хаотични системи до нехаотично състояние, задачи за изкуствена хаотификация на нехаотични системи, както и задачи от областта на синхронизацията на хаотични системи [1-3]. Последната група задачи е особено популярна сред научната общност предвид различните приложения на явленияето хаотична синхронизация, например за защитени комуникации и криптиране на данни.

Хаотичните системи са нелинейни системи със сложна динамика с елемент на случайност, характеризират се с пове-

дение, близко до това на стохастичните системи, но същевременно се описват с детерминирани математични модели, често от нисък ред. При задачите за хаотична синхронизация се търси такъв тип връзка между две или повече хаотични системи, че динамиката им да бъде синхронизирана в определена форма, но да запазят хаотичния си характер. Най-популярният тип синхронизация е идентичната, при която след влизане в синхронен режим хаотичните системи извършват еднакви (идентични) хаотични движения. Ако се дефинират функциите на разсъгласуване като разлики между отделните двойки еднотипни променливи на двете системи, то при такъв тип синхронизация те ще клонят към нула.

Съществуват и други типове хаотична синхронизация, различни от идентичната. Принципно, ако между две хаотични

системи се постигне по-сложен тип синхронизация, това би дало по-големи възможности за защита на сигналите при използването на тези синхронизационни схеми в комуникационни системи за защитено предаване на данни. Такъв тип синхронизация е т.н. анти-синхронизация [4-6]. При нея хаотичната динамика на едната хаотична система в синхронизационната схема се явява „огледален“ образ на динамиката на другата система, т.е. дефинират се функции на разсъгласуване, които са не разликите, а сумите от съответните двойки променливи на двете системи. Когато тези функции клонят към нула, между системите има анти-синхронизация. Целта е да се проектират такива управляващи функции към едната от двете хаотични системи, че това условие да бъде изпълнено.

В настоящия доклад се синтезира синхронизационна система между две еднотипни хаотични системи. Моделът на системите е от трети ред, с една нелинейност, предложен през 2024 г. С помощта на втория метод за устойчивост на Ляпунов са изчислени управляващи функции, които се прилагат по метода на „активно управление“ към подчинената хаотична система и водят до стабилен режим на анти-синхронизация между двете системи в синхронизационната схема. Резултатите са тествани чрез компютърни симулации с програмния продукт Matlab.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В [7] е предложен модел на хаотична система от т.н. „jerk“ тип – модел с една нелинейност от трети ред, който се описва с уравненията:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 + bx_2 - x_3 - x_1^2x_2 - cx_3,\end{aligned}\quad (1)$$

където:

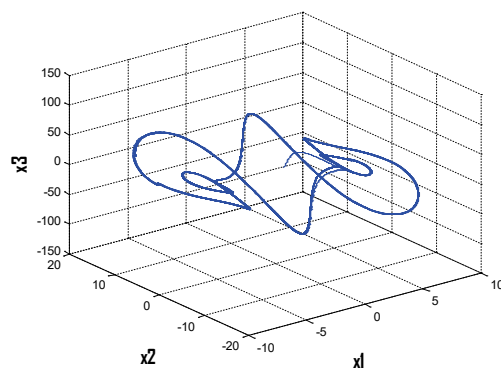
$$a = 2.5, b = 10, c = 0.4 \quad (2)$$

са константни параметри.

Хаотичната система, която ще бъде наричана модел на Yan-Wang-Li или YWL по имената на предложилите я автори, има проста структура със само седем члена, което я прави лесна за схемна реализация, с малък брой елементи и съответно по-ниска цена при практически реализации. В модела е налична само една нелинейност – от трети ред в третото уравнение на (1). Условието за наличието на хаос в една система е системата да е нелинейна и ако е непрекъсната, да е поне от трети ред, т.е. системата YWL е възможно най-опростена математическа конструкция, способна да генерира хаос. В същото време в [7] е установено, че системата (1) може да има много разнообразна динамика в зависимост от стойностите на параметрите и началните условия, изразяваща се в осем възможни комбинации от атрактори в пространството на състоянието (x_1, x_2, x_3) , например два атрактора от тип точка, комбинация от точка и граничен цикъл и т.н. Пет от тези комбинации включват наличие на хаотичен атрактор. При стойности на параметрите (2) и начални условия:

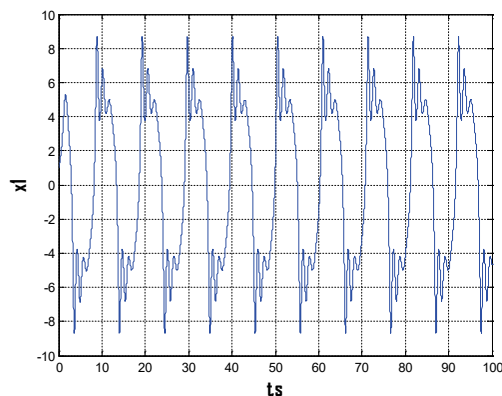
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(0) &= [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = \\ &= [1 \ 1 \ 1]^T\end{aligned}\quad (3)$$

атракторът на системата е хаотичен и е показан на фиг. 1.



Фиг. 1. Хаотичен атрактор на модела на Yan-Wang-Li

На фиг. 2 е показана времевата характеристика на една от системните променливи - $x_1(t)$. Динамиката на останалите променливи е подобна.

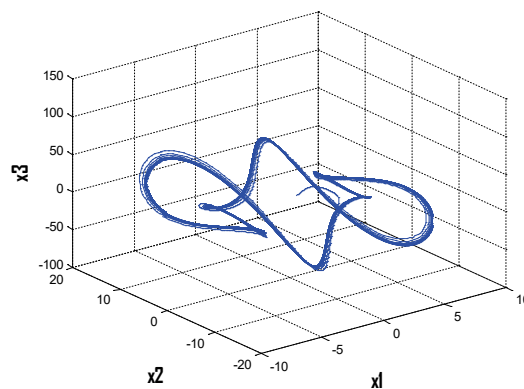


Фиг. 2. Времева характеристика на една от системните променливи

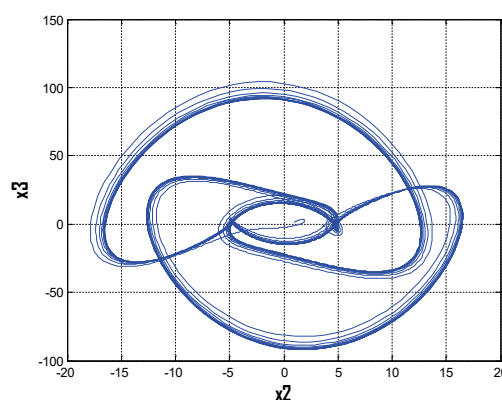
Както от фиг. 1, така и от фиг. 2 се вижда, че хаотичният атрактор на системата YWL има по-ограничен брой неустойчиви периодични орбити от по-голямата част от популярните хаотични модели и по-скоро наподобява сложен граничен цикъл. Авторът на настоящия доклад след серия експерименти по модифициране на първоначалния модел на системата (1) предлага модификация във второто уравнение на модела, в резултат на която системата придобива динамика, по-присъща на хаотичните системи:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_1, \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 + bx_2 - x_3 - x_1^2 x_2 - cx_3. \end{aligned} \quad (4)$$

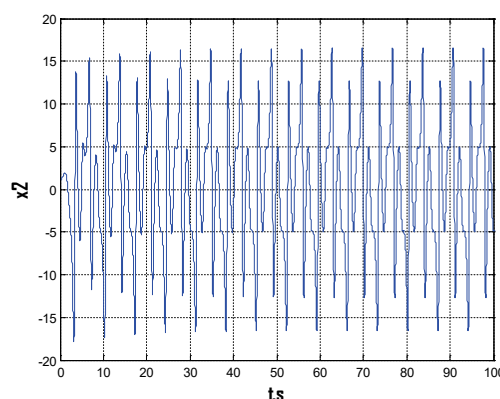
На фиг. 3 е показан атракторът на модела (4) в пространството на състоянието (x_1, x_2, x_3) , на фиг. 4 – проекцията на атрактора в една от фазовите равнини - (x_3, x_2) , а на фиг. 5 – времевата характеристика $x_2(t)$. На фигурите се вижда по-големия брой орбити на атрактора спрямо оригиналния от фиг. 1, съответно – по-ясно изразеното хаотично състояние на системата.



Фиг. 3. Хаотичен атрактор на модифициран модел на Yan-Wang-Li



Фиг. 4. Проекция на атрактора на модифицирания модел YWL в една от фазовите равнини



Фиг. 5. Времева характеристика на една от системните променливи на модифициран модел YWL

На основата на модифицирания модел YWL (4) ще бъде синтезирана следната синхронизационна система, изградена от два идентични модела (4), наречени *MASTER* и *SLAVE*:

MASTER

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_1, \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 + bx_2 - x_3 - x_1^2 x_2 - cx_3.\end{aligned}\quad (5)$$

SLAVE

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + u_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 - \tilde{x}_1 + u_2, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 - c\tilde{x}_3 + u_3,\end{aligned}\quad (6)$$

където с $\tilde{x}_i, i = 1 \div 3$ са означени променливите на системата *SLAVE*.

Конфигурацията от две системи е от тип *MASTER – SLAVE*, тъй като първата система в схемата - (5) подава синхронизиращи сигнали, функции на променливите ѝ на състоянието, към втората – (6), без да получава обратно сигнали от нея. С $u_i, i = 1 \div 3$ са означени управляващите функции към *SLAVE* системата, които съдържат променливи от *MASTER* системата. Наборът параметри на системата (6) е идентичен с този на системата (5), като стойностите им са тези от (2). Началните условия на системите в синхронизационната схема са различни. Началните условия на системата (5) са номиналните начални условия (3), а тези на системата (6) са:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(0) &= [\tilde{x}_1(0) \quad \tilde{x}_2(0) \quad \tilde{x}_3(0)]^T = \\ &= [0.6 \quad 0.8 \quad 1.4]^T\end{aligned}\quad (7)$$

и са избрани на случаен принцип.

За реализиране на дефинираната цел за постигане на режим на анти-синхронизация в синхронизационната система, изградена от системите (5) и (6), е необходимо първо да се дефинират функциите на разсъгласуване между отделните двойки променливи на двете системи, които ще бъдат:

$$\begin{aligned}e_1 &= x_1 + \tilde{x}_1, \\ e_2 &= x_2 + \tilde{x}_2, \\ e_3 &= x_3 + \tilde{x}_3,\end{aligned}\quad (8)$$

При така дефинираните функции на разсъгласуване режим на анти-синхронизация ще има, ако:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1 \div 3, \quad (9)$$

което условие може да бъде изпълнено при синтез на подходящи управляващи функции u_i към системата (6).

От (8) и (9) се вижда, че при анти-синхронизация между двете хаотични системи

$$x_i = -\tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3, \quad (10)$$

т.е. хаотичните движения на едната системата ще бъдат „огледални” на тези на другата.

Синтезът на управляващите функции u_i в (6) ще бъде реализиран по метода на активно управление с използване на втория метод за устойчивост на Ляпунов. Според него, ако се намери функция $V(e)$, наречена функция на Ляпунов, която отговаря на следните условия:

$$V(\mathbf{e}) > 0, \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (11)$$

$$V(\mathbf{e}) = 0, \forall \mathbf{e} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} < 0, \forall \mathbf{e} \neq 0 \quad (13)$$

то точката в пространството на състоянието на системата от разсъгласуването $\mathbf{e} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] = \mathbf{0}$ ще бъде устойчива. Изпълнението на това условие съответства на постигане на анти-синхронизация между системите при функции на разсъгласуване (8).

Обикновено за удовлетворяване на условията (11) и (12) се избира квадратична функция от типа:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2). \quad (14)$$

Производната на функцията $V(\mathbf{e})$ е:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3. \quad (15)$$

Производните на функциите на разсъгласуването e_i според (8) ще бъдат:

$$\dot{e}_i = \dot{x}_i + \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (16)$$

и съответно могат да бъдат получени при сумирането на двойките уравнения на системите (5) и (6):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_2 + \tilde{x}_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= x_3 - x_1 + \tilde{x}_3 - \tilde{x}_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= -ax_1 + bx_2 - x_3 - x_1^2x_2 - cx_3 + \\ &\quad -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 - c\tilde{x}_3 + u_3, \end{aligned} \quad (17)$$

или с отчитане на (8):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= e_3 - e_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= -ae_1 + be_2 - e_3 - ce_3 - \\ &\quad -x_1^2x_2 - \tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + u_3, \end{aligned} \quad (18)$$

Тогава, ако управляващите функции u_i се синтезират във вида:

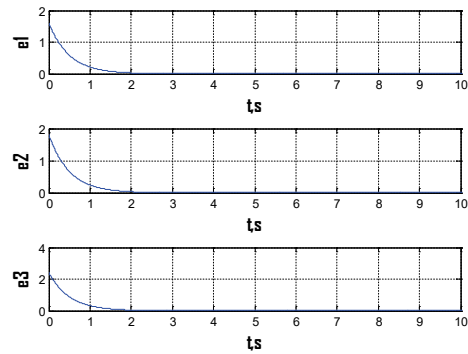
$$\begin{aligned} u_1 &= -e_2 - k_1e_1, \\ u_2 &= -e_3 + e_1 - k_2e_2, \\ u_3 &= ae_1 - be_2 + e_3 + ce_3 + x_1^2x_2 + \tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 - k_3e_3, \end{aligned} \quad (19)$$

то след заместването им в (18) ще се получат изразите:

$$\dot{e}_i = -k_i e_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (20)$$

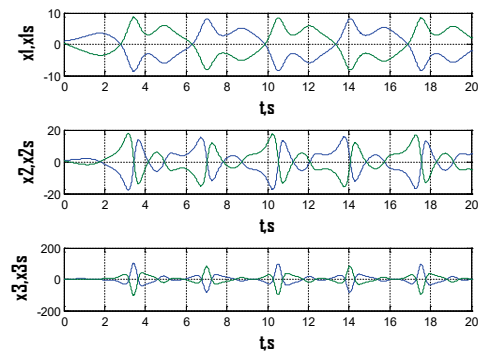
При заместването на изразите (20) в (15) и избор на положителни константи k_i се получава отрицателно определена функция, която удовлетворява условието (13) и с това и последното условие за постигане на анти-синхронизация между системите (5) и (6) се изпълнява.

Синхронизационната система (5)-(6) с управляващи функции (19) е симулирана с избор на коефициенти $\forall k_i = 2$. На фиг. 6 са показани функциите на разсъгласуване e_i (8).



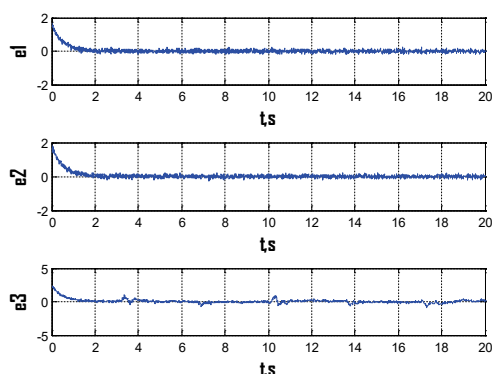
Фиг. 6. Функции на разсъгласуване

Вижда се, че след кратък преходен процес функциите на разсъгласуване се установяват в 0, т.е. системите от синхронизационната схема влизат в режим на анти-синхронизация. Този режим се илюстрира нагледно, ако се наблюдава съвместната динамика на отделните двойки променливи на двете системи $x_i(t), \tilde{x}_i(t)$, която е показана на фиг. 7.



Фиг. 7. Съвместна динамика на двойките променливи при анти-синхронизация

При конкретна физическа реализация на синхронизационната схема е възможно сигналите от *MASTER* системата x_i , които участват в управляващите функции към *SLAVE* системата да са зашумени. На фиг. 8 са показани функциите e_i при адитивно зашумяване на променливите x_i с бял Гаусов шум с дисперсия $\sigma^2 = 0.005$. Въпреки шума системите остават в режим на анти-синхронизация.



Фиг. 8. Функции на разсъгласуване при зашумени свързващи сигнали

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена е модификация на новооткрит хаотичен модел, при която атракторът на системата има по-ясно изразен хаотичен характер. На основата на така модифицирания модел на Yan-Wang-Li е проектирана синхронизационна схема между два идентични модела от предложения тип. Между двете хаотични системи е постигната анти-синхронизация,

която е по-сложен тип синхронизирано движение и намира приложение за защитени комуникации. Управляващите функции са изчислени с помощта на втория метод за устойчивост на Ляпунов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Boccaletti, S., J. Kurths, G. Osipov, D. Valadares, C. Zhou, The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports* 366 (2002), pp.1-101.
- [2] Carroll, T., L. Pecora, Synchronizing chaotic circuits, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, Vol.38, No.4, 1991, pp.453-456.
- [3] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.
- [4] Feng, J. *et.al.* Anti-synchronization of two different hyperchaotic systems with fully uncertain parameters. *Computational Intelligence and Security*, 2009.
- [5] Ren, L., C. Peng. Adaptive coexistence of synchronization and anti-synchronization for a class of switched chaotic systems. *Processes* 2023 11(2) 530.
- [6] Chen, D. *et. al.* Chaotic synchronization and anti-synchronization for a novel class of multiple chaotic systems via a sliding mode control scheme. *Nonlinear Dyn* (2012) 69:35-55.
- [7] Yan, S., J. Wang, L. Li. Analysis of a new three-dimensional jerk chaotic system with transient chaos and its adaptive backstepping synchronous control. *Integration* 98 (2024) 102210.