

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИТЕ ЗА СИНХРОНИЗАЦИЯ НА НОВ МОДЕЛ НА ХАОТИЧНА СИСТЕМА

Драгомир Чантов

Технически университет - Габрово, ул. "Х. Димитър" 4, Габрово, България
*кореспондиращ автор: dchantov@tugab.bg

RESEARCHING THE POSSIBILITIES FOR SYNCHRONIZATION OF A NEW MODEL OF A CHAOTIC SYSTEM

Dragomir Chantov

Technical university of Gabrovo, 4 H. Dimitar Str., Gabrovo, Bulgaria
*Corresponding author: dchantov@tugab.bg

Abstract

The possibilities for designing synchronization schemes on the basis of a new chaotic system, proposed in 2023, are examined in this paper. The chaotic model possesses a third-order nonlinearity. In the chaos-based secure communication systems or in the chaos-based cryptology, a higher order nonlinearities can provide a higher degree of data protection. Therefore, the chaotic model, called GKUC system, is of a particular interest. Different synchronization schemes are proposed for achieving identical, but also some other more complex types of synchronization between two GKUC systems. The most simple scheme is with standard one-way coupling between the systems, the others are based on Lyapunov stability analysis based active control. This approach allows the achieving of different complex types of synchronization, which have some advantages when used in communication schemes.

Keywords: ключова дума на английски език; ключова дума на английски език.

ВЪВЕДЕНИЕ

Нелинейните системи с хаотичен характер са клас системи, описвани обикновено с диференциални уравнения от нисък ред, които имат сложна динамика, близка до тази на стохастичните системи и много силна чувствителност към началните условия. Това ги прави подходящи за реализиране на различни видове защита на данни, например кодиране на информационни сигнали в комуникационни системи или криптиране на изображения.

В основата на това приложение на хаотичните системи стои явлението хаотич-

на синхронизация [1,2]. Базовата идея е две синхронизирани хаотични системи да бъдат вградени в предавателя и в приемника на комуникационната система и полезният информационен сигнал да се интегрира по определен начин в свързващия хаотичен сигнал с привидно случаен характер, който се предава между системите [3,4].

В тази връзка нелинейности от по-висок от втори ред в хаотичния модел теоретично предоставят възможности за по-високо степен на защита на предаваните данни [4]. Хаотичният модел, който се използва за синтезиране на синхрони-

зационни схеми в настоящия доклад, е от трети ред и съдържа кубична нелинейност, както и две квадратични и по тази причина представлява интерес за синтез на синхронизационни схеми.

В доклада се предлагат няколко синхронизационни схеми на основата на разглеждания модел, получени по различни методи – от метод на стандартно еднопосочно свързване с обратна връзка до методи на активно управление с помощта на втория метод за устойчивост на Ляпунов, които позволяват получаването освен на базовата идентична синхронизация между системите и на различни по-сложни видове синхронизация като анти-синхронизация, комбинирана синхронизация и др. От своя страна тези по-сложни видове синхронизация също са предпочитани за използване в хаотичните комуникационни системи заради по-големия потенциал за защита на предаваните данни.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Преобладаващата част от известните модели на хаотични системи са от трети ред – Lorenz, Rossler, Chua, Chen и др. В научната литература продължава появата на публикации за новооткрити модели на хаотични системи. В публикация от 2023 г. [5] е предложен модел, който ще бъде наричан GKUC модел (система) по имената на авторите на статията. Този модел има две характерни особености. Първо, уравненията съдържат само 5 основни члена и един коефициент, т.е. алгебричният запис на модела е по-прост, което се предпочита при някои задачи. Второ, моделът има три нелинейности, една от които е кубична, което от своя страна би било предимство, ако на базата на този модел се синтезира хаотична комуникационна система, тъй като нелинейности от по-висок ред дават възможност за по-висока степен на защита на предавания информационен сигнал.

Математическият запис на GKUC модела е:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3, \\ \dot{x}_3 &= -a - x_1 x_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Моделът (1) има само един параметър с номинална стойност:

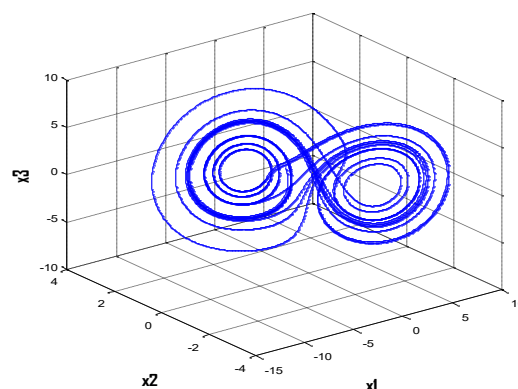
$$a = 4.6. \quad (2)$$

са константни параметри.

В [5] са изчислени четири равновесни точки. Моделът (1) е симулиран с помощта на програмния продукт Matlab за начални условия:

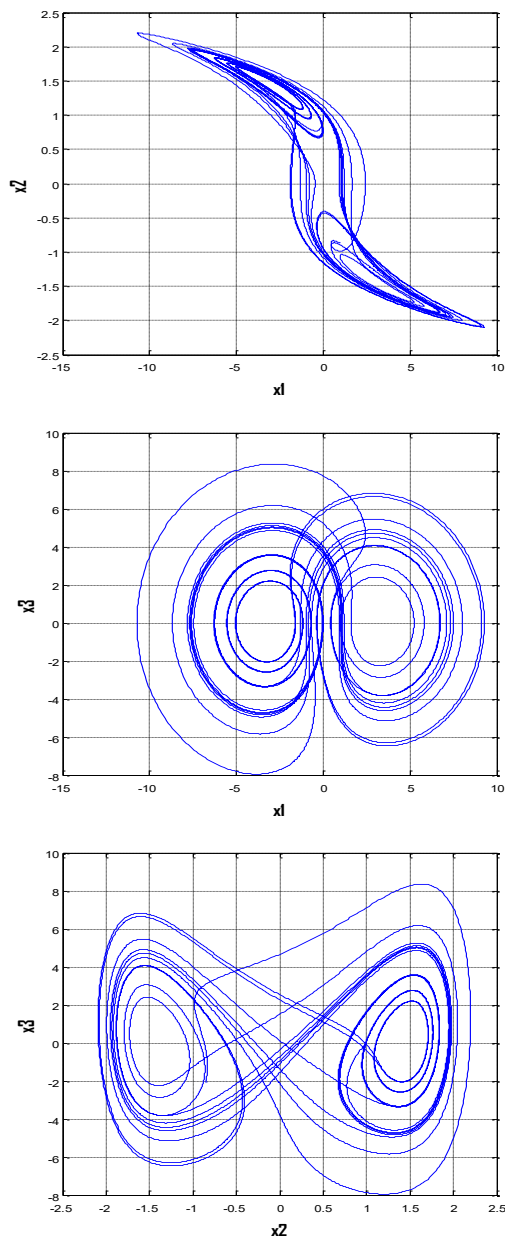
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(0) &= [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = \\ &= [0 \quad 1 \quad 0]^T.\end{aligned}\quad (3)$$

На фиг. 1 е показан получения хаотичен атрактор в пространството на състоянието (x_1, x_2, x_3) .



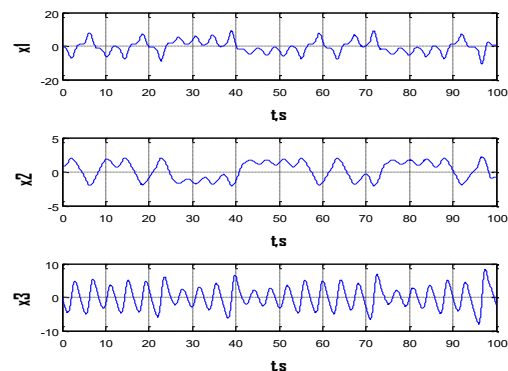
Фиг. 1. Хаотичен атрактор на модела GKUC

На фиг. 2 са показани проекциите на хаотичния атрактор в трите фазови равнини (x_1, x_2) , (x_1, x_3) и (x_2, x_3) , които дават по-ясна представа за структурата на атрактора, който е изграден от голям брой неустойчиви периодични орбити в ограничено геометрично пространство. Като цяло структурата на атрактора на системата GKUC е подобна на тази на популярния хаотичен модел на Lorenz.



Фиг. 2. Проекции на хаотичния атрактор на модела GKUC в отделните фазови равнини

На фиг. 3 са показани времевите характеристики на променливите на състоянието. Типично за хаотичните системи, динамиката им е подобна на тази на променливите на чисто стохастична система, т.е. само по времевите характеристики не може да се прецени дали дадена система е хаотична или стохастична.



Фиг. 3. Времеви характеристики на променливите на модела GKUC

Относно възможностите за синтезиране на синхронизационни схеми въз основа на модела (1), първоначално ще бъде изследвана възможността за синтез на синхронизационна схема между два еднотипни модела от вида (1) по един от най-лесните за реализация методи за хаотична синхронизация – методът на стандартно еднопосочно свързване с обратна връзка в подчинената система. При този метод се разглеждат две еднакви хаотични системи, които ще бъдат наричани Master (управляваща) и Slave (подчинена), свързани еднопосочно по следния начин:

$$\text{Master} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\text{Slave} \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \alpha \mathbf{E}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}), \quad (5)$$

където α е коефициент на връзката, а $\mathbf{E}$ е квадратна матрица с размерност n , определяща точната позиция на свързващия сигнал в Slave системата.

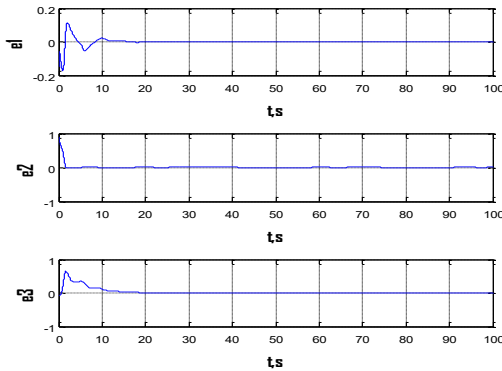
Нека Master системата е моделът GKUC (1). При избор на $\alpha = 10$ и матрица на връзката:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Slave системата ще бъде:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + 10(x_1 - \tilde{x}_1), \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2^3, \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -a - \tilde{x}_1 \tilde{x}_2.
\end{aligned}
\tag{7}$$

Параметърът a в (7) има същата номинална стойност $a = 4.6$, като този в системата (1). Получените функции на разсъгласуване между променливите на Master и на Slave системите $e_i = x_i - \tilde{x}_i$, $i = 1 \div 3$ са показани на фиг. 4 и показват наличието на идентична синхронизация между системите (1) и (7), т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$.



Фиг. 4. Функции на разсъгласуване при синхронизационна схема (1), (7)

Симулацията е за начални условия на Slave системата $\tilde{x}(0) = [0.15 \ 0.1 \ 0.1]^T$, избрани произволно. При избор на друга форма на матрицата на връзката (6), особено при повече ненулеви елементи, е възможно получаването на по-бърза синхронизация.

Не винаги методът със стандартно еднопосочно свързване дава резултат. Възможно е при някои варианти на матрицата на връзката синхронизация да не се получи. Друг метод за хаотична синхронизация, при който аналитично може да се докаже получаването на синхронизация, е методът на активното управление с функции на Ляпунов, при който, ако се намери функция $V(e)$, наречена функция на Ляпунов, която отговаря едновременно на условията:

$$\begin{aligned}
V(e) &> 0, \forall e \neq 0, \quad V(e) = 0, \forall e = 0, \\
\frac{dV(e)}{dt} &< 0, \forall e \neq 0
\end{aligned}
\tag{8}$$

то точката в пространството на състоянието на системата от разсъгласуването $e = [e_1 \ e_2 \ e_3] = 0$ ще бъде устойчива, т.е. ще има хаотична синхронизация.

Нека Slave системата бъде синтезирана във вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + u_1, \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2^3 + u_2, \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -a - \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + u_3,
\end{aligned}
\tag{9}$$

където u_i са управляващи функции, които ще бъдат синтезирани с оглед удовлетворяване на условията (8).

Нека бъде избрана следната функция на Ляпунов:

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2).
\tag{10}$$

Функцията (10) удовлетворява първите две условия от (8). Производната на функцията $V(e)$ е:

$$\frac{dV(e)}{dt} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3.
\tag{11}$$

Управляващите функции в (9) ще бъдат синтезирани така, че да се удовлетвори и третото условие от (8). С отчитане, че $\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\tilde{x}}_i$, за системата от разсъгласуването се получава:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 - u_1, \\
\dot{e}_2 &= -e_1 - x_2^3 + \tilde{x}_2^3 - u_2, \\
\dot{e}_3 &= -x_1 x_2 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - u_3.
\end{aligned}
\tag{12}$$

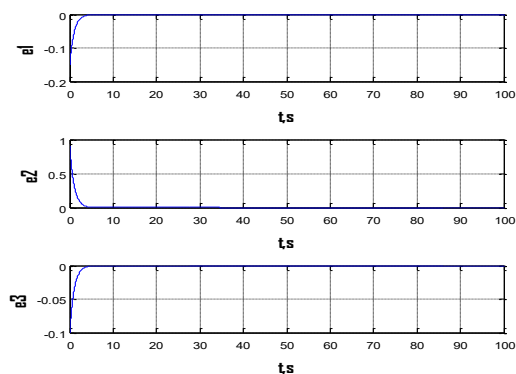
Тогава, ако управляващите функции u_i се синтезират във вида:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + k_1 e_1, \\ u_2 &= -e_1 - x_2^3 + \tilde{x}_2^3 + k_2 e_2, \\ u_3 &= -x_1 x_2 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + k_3 e_3, \end{aligned} \quad (13)$$

то при заместването им в (12) се получава:

$$\dot{e}_i = -k_i e_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (14)$$

При заместване на (14) в (11) и избор на $k_i > 0, i = 1 \div 3$ се получава отрицателно определена функция, която удовлетворява и третото условие от (8) и с това аналитично се доказва получаването на идентична синхронизация за управляващи функции (13). На фиг. 5 са показани функциите на разсъгласуване за синхронизационната схема (1), (9) с управляващи функции (13) и коефициенти $k_i = 1$. Потвърждава се наличието на идентична синхронизация, като преходния процес е по-кратък спрямо този от схемата (1), (7). Началните условия на двете системи са същите като в предишната схема.



Фиг. 5. Функции на разсъгласуване при синхронизационна схема (1), (9) с управляващи функции (13)

Методът с функции на Ляпунов дава възможност за получаване и на други видове синхронизация, различна от идентичната. Такъв вид е т.н. анти-синхронизация [6], при която функциите на разсъгласуване се избират от вида

$e_i = x_i + \tilde{x}_i, i = 1 \div 3$, т.е. при получаване на синхронизация ще се изпълнява:

$$x_i = -\tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3. \quad (15)$$

За посочения тип функции на разсъгласуване и с отчитане, че $\dot{e}_i = \dot{x}_i + \dot{\tilde{x}}_i$, за системата от разсъгласуването се получава:

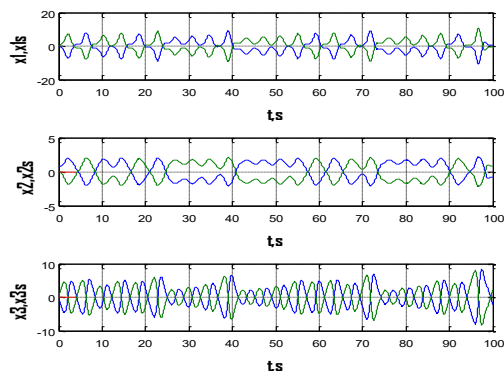
$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_2 x_3 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= -e_1 - x_2^3 - \tilde{x}_2^3 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= -2a - x_1 x_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + u_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Ако за така получената система (16) се синтезират следните управляващи функции:

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 - k_1 e_1, \\ u_2 &= e_1 + x_2^3 + \tilde{x}_2^3 - k_2 e_2, \\ u_3 &= 2a + x_1 x_2 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_3 e_3, \end{aligned} \quad (17)$$

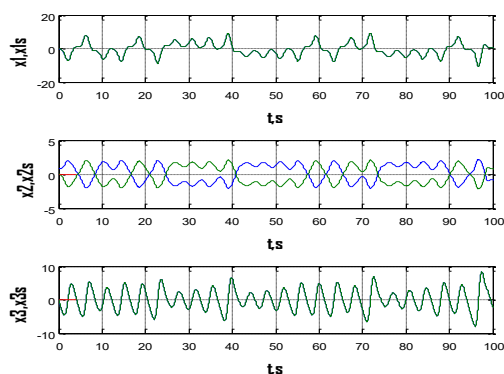
то при заместването им в (16) отново се получават изразите (14), с което се гарантира получаването на желания тип синхронизирано движение.

Преходните процеси на функциите на разсъгласуване са с подобна продължителност, като тези от фиг. 5. При анти-синхронизация е по-интересно да се наблюдава съвместната динамика на съответните двойки променливи на Master и на Slave системите, която е показана на фиг. 6. Вижда се, че хаотичната динамика на конкретна променлива е „огледален” образ на съответната променлива от другата хаотична система. Този тип сложно синхронизирано движение се използва при хаотичните комуникационни системи за осигуряване на по-висока степен на защита на данните.



Фиг. 6. Съвместна динамика на двойките променливи на Master и на Slave системите при антисинхронизация.

По аналогичен начин могат да се изчислят управляващи функции за получаване на хибридна синхронизация между системите, при които част от двойките променливи са в режим на идентична синхронизация, а другата част – в режим на антисинхронизация. Възможни са множество комбинации, отново предимството на този тип синхронизация се проявява при синтеза на хаотични комуникационни системи. Например ако се изберат функции на разсъгласуване $e_1 = x_1 - \tilde{x}_1$, $e_2 = x_2 + \tilde{x}_2$, $e_3 = x_3 - \tilde{x}_3$, по аналогичен начин могат да се пресметнат управляващи функции към Slave системата. На фиг. 7 е показана съвместната динамика на двойките променливи за този случай, като се вижда, че първата и третата двойки се движат идентично, а втората - в режим на антисинхронизация.



Фиг. 7. Съвместна динамика на двойките променливи на Master и на Slave системите при вариант на хибридна синхронизация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Въз основа на получените резултати могат да бъдат направени следните изводи. Системата GKUC е нов хаотичен модел, който въпреки, че попада в категорията на най-разпространените модели от трети ред, се отличава по преобладаващия брой нелинейни членове в модела и по наличието на кубична нелинейност. На основата на модела GKUC са синтезирани синхронизационни схеми по различни методи. При метода с обратна връзка свързващия сигнал е най-прост, но намирането на работещ вариант става по метода проба-грешка и преходният процес е с по-голяма продължителност. Методът с активно управление принципно е с по-сложна връзка между системите, но преходният процес е по-кратък. На основата на този метод са получени и по-сложни типове синхронно движение, като антисинхронизация и хибридна синхронизация, които са предпочитани при хаотичните комуникационни системи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.
- [2] Boccaletti, S., C. Grebogi, "The control of chaos: theory and applications", Physics Reports, vol. 329, 2000, pp.103-197.
- [3] Cho, K., T. Miyano. Chaotic cryptography using augmented Lorenz equations aided by quantum key distribution. IEEE Trans Circ Systems-I, Vol. 62, No 2, 2015, pp.478-487.
- [4] P.Mareca, B. Bordel, A Chaotic Cryptographic Solution for Low-Range Wireless Communications in Industry 4.0, World Conf. on Inf. Syst. and Techn., Springer, 2019, pp. 134-144.
- [5] Gokyildirim, A., U. Kocamaz, Y. Uyaroglu, H. Calgan, A novel five term 3D chaotic system with cubic nonlinearity and its mc-based secure commun. implementation. Int. J.. Electron. Commun. 160 (2023) 154497.
- [6] Feng, J. *et.al.* Anti-synchronization of two different hyperchaotic systems with fully uncertain parameters. Comp. Intelligence and Security, 2009.