International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

СРАВНИТЕЛЕН СТРУКТУРЕН АНАЛИЗ НА АЛУМИНИЙ, МЕД, СТОМАНА И БЕРИЛИЕВА МЕД ПРИ ВЪТРЕШНО НАЛЯГАНЕ ОТ 200MPA-ВАЛИДИРАНЕ С АНАЛИТИЧНИЯ МОДЕЛ НА ЛАМЕ

инж. Антония Пенева

НВУ "Васил Левски" гр. Велико Търново, България

antoniq1980peneva@abv.bg
GSM:0884972680

COMPARATIVE STRUCTURAL ANALYSIS OF ALUMINUM, COPPER, STEEL AND BERYLLIUM COPPER AT INTERNAL PRESSURE OF 200MPA– VALIDATION WITH LAMÉ ANALYTICAL MODEL

Antoniya Peneva

Vasil Levski National Military University, Veliko Tarnovo, Bulgaria

antoniq1980peneva@abv.bg
GSM:0884972680

Abstract

This report presents a comparative structural analysis of four materials – 6061 aluminum, pure copper, AISI 304 steel and C17200 beryllium copper – at an internal pressure of 200 MPa applied to the inner wall of a cylindrical channel with dimensions: inner radius 0.425 mm, outer radius 2.1 mm. Numerical simulations in ANSYS Mechanical (Static Structural) and the Lame analytical model for a thick-walled cylinder were used. It was found that only beryllium copper (C17200) has a sufficient yield strength (≈1000 MPa) to operate safely at this pressure. Aluminum, copper and steel give equivalent stresses (von Mises) of the order of 360–540 MPa, which exceeds or is close to their yield strengths. The analytical model gives values of ≈360 MPa for all materials, while ANSYS takes into account stress concentrations and gives higher values (≈540 MPa), which emphasizes the need for numerical modeling of the real geometry.

Keywords: структурен анализ, налягане, дебелостенен цилиндър, уравнения на Ламе, von Mises, берилиева мед, ANSYS.

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Регулаторните втулки в някои устройства са подложени на екстремно вътрешно налягане от порядъка на 200 MPa, генерирано от детонацията на газовете. Изборът на материал е критичен за надеждността и безопасността. В този доклад са сравнени четири материала с различни механични свойства: алуминий 6061 (лек, добър топлопроводник), Медна сплав (отлична топлопроводност, но мека), стомана AISI 304 (висока якост, но тежка) и берилиева мед C17200 (високоякостна сплав, използвана в космическата и отбранителната промишленост). Целта е да се определи кой материал може да издържи налягане 200 MPa без пластична деформация, като се използва комбинация от аналитичен модел (Ламе) и числени симулации в ANSYS Mechanical.

Print ISSN: 1313-230X, Online ISSN: 3033-1404

2. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ (аналитичен)

За аналитичното изследване е избран модел на идеален дълъг цилиндър с равномерно разпределено налягане, тъй като дължината на втулката превишава значително нейния диаметър, което позволява крайните ефекти да бъдат пренебрегнати и напрегнатото състояние да се разглежда в равновесно състояние с равномерно разпределено вътрешно налягане, осигуряващо осисиметрично разпределение на напреженията.

2.1. Уравнения на Ламе за дебелостенен цилиндър

За цилиндър с вътрешен радиус r1, външен радиус r2, вътрешно налягане p (външното налягане е 0),Радиалното σ_r и тангенциалното σ_θ напрежение са:[1]

$$\sigma_r(r) = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right), \quad (1)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right). \quad (2)$$

Аксиалното напрежение σ_zза цилиндър със свободни краища е $\sigma_z = 0$ (плоско напрегнато състояние). За цилиндър с ограничена аксиална деформация (например дълъг канал, фиксиран в краищата), σ_z се изчислява от условието за равнинна деформация:

$$\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad [1] \quad (3)$$

Еквивалентно напрежение по фон Мизес (von Mises) се изчислява като:[5]

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]}. \quad (4)$$

2.2. Опростена формула за вътрешната повърхност (r = r1)

При r = r1:

$$\sigma_r(r_1) = -p, \qquad \sigma_\theta(r_1) = p\,\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (5)$$

За нашите размери (r1 = 0,425 mm, r2 = 2,1 mm):

$$\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{(2{,}1^2 + 0{,}425^2)}{(2{,}1^2 - 0{,}425^2)} \approx 1{,}085.$$

Следователно:

$$\sigma_\theta(r_1) = p \times 1{,}085 = 217 \text{ MPa}.$$

Радиалното напрежение $\sigma_r = -200MPa$(натиск). Приемайки равнинно деформирано състояние[1] $\left(\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right)$с$\nu \approx 0{,}33$:

$$\sigma_z = 0{,}33 \times (-200 + 217) = 0{,}33 \times 17 = 5{,}61 \text{ MPa}.$$

Сега изчисляваме σ_{VM}:

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(-200 - 217)^2 + (217 - 5{,}61)^2 + (5{,}61 + 200)^2]}$$

$$\approx 361 \text{ MPa}.$$

Аналитичната стойност на σ_{VM}за всички материали е една и съща (361 MPa), защото тя зависи само от геометрията и налягането, а не от E и ν (макар че ν влияе слабо). Разликите между материалите идват от тяхната граница на провлачване σ_y[4, 5].

3. ГЕОМЕТРИЯ И СВОЙСТВА НА МАТЕРИАЛИТЕ

Геометрия (най-натоварената част – цилиндричният канал на втулката):

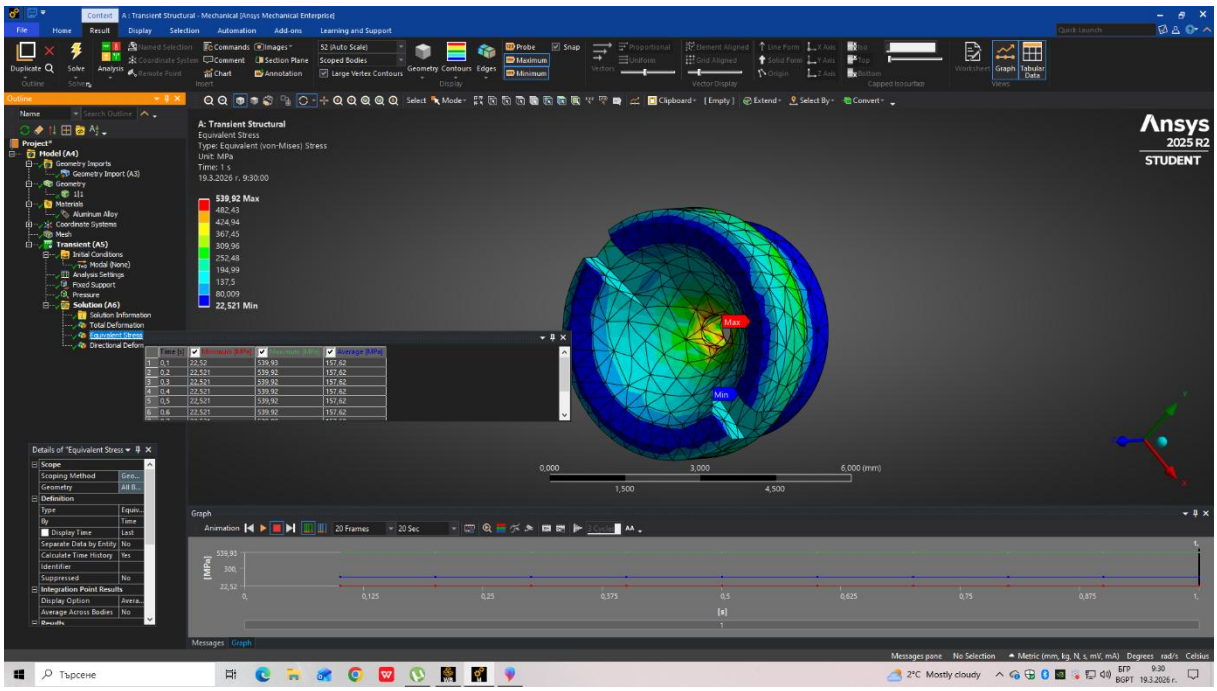
· Вътрешен радиус r1 = 0,425 mm
· Външен радиус r2 = 2,1 mm
· Дебелина на стената ≈ 1,675 mm

***Таблица 1**.Свойства на материалите[3,4]*

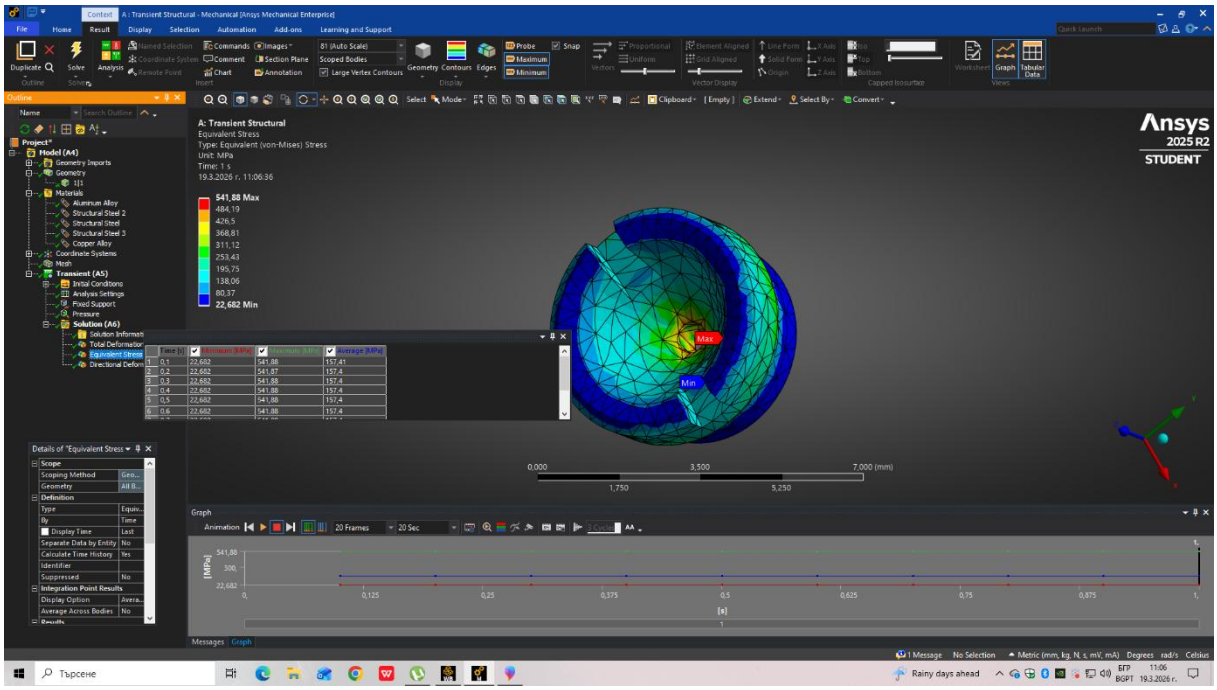
Материал	*Модул на Юнг E (GPa)*	*Коеф. Поасон ν*	*Граница на провлачване $\sigma_y(MPa)$*	*Топло проводност k $(W/m \cdot K)$*
Алуминий 6061	69	0,33	240–280	167
Медна сплав	117	0,34	70–150	390
Стомана AISI304	200	0,30	250–300	16,2
Берилиева мед C17200 (AT)	128	0,30	≈1000	~105

4. ЧИСЛЕНИ СИМУЛАЦИИ В ANSYS MECHANICAL (STATIC STRUCTURAL)[2]

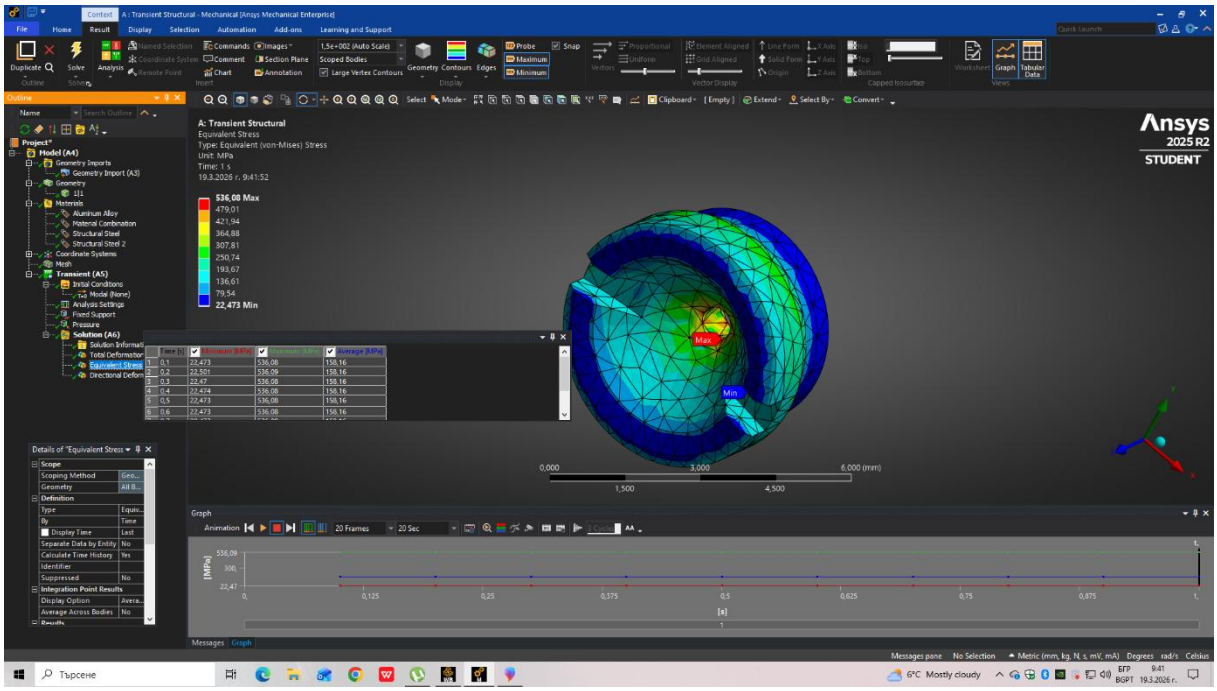
Симулациите са извършени с налягане 200 MPa, приложено върху вътрешната стена. Външната стена е свободна (без опори), за да се симулира реален детайл, който не е фиксиран. Използвана е мрежа от тетраедрични елементи с локално сгъстяване в зоната на конуса (за да се отчете концентрацията на напрежения).



***Фиг.1**.Разпределение на еквивалентното напрежение във втулка алуминий 6061*



Фиг.2. *Разпределение на еквивалентното напрежение във втулка медна сплав*



Фиг.3. *Разпределение на еквивалентното напрежение във втулка стомана AISI 304*

Таблица 2 *.Резултати от ANSYS von Mises- максимална стойност[2]*

Материал	σ_{vm} ANSYS(MPa)
Алуминий 6061	539,9
Чиста мед	≈541,9
Стомана AISI 304	≈536
Берилиева мед C17200	~540

Забележка: Числените стойности са по-високи от аналитичните (361 MPa) поради концентрация на напрежения в преходната зона (конус–цилиндър) и острите ръбове, които аналитичният модел не отчита.

5. СРАВНЕНИЕ С ГРАНИЦАТА НА ПРОВЛАЧВАНЕ И ИЗБОР НА МАТЕРИАЛ

***Таблица 3**. Сравнение на аналитични и числени напрежения с границата на провлачване[1-5]*

Материал	аналитичен (MPa)	σ_{vm} ANSYS(MPa)	σ_y(MPa)	Издържа ли при налягане 200 MPa ($\sigma_{vm} \leq \sigma_y$)
Алуминий 6061	361	539	240–280	Не -превишава
Чиста мед	361	541,9	70–150	Не - превишава
Стомана AISI 304	361	536	250–300	Не - превишава
Берилиева мед C17200	361	~540	~1000	Да -значителен резерв

Анализ:

- Алуминий и стомана – напреженията (540 MPa) надвишават границата на провлачване (≈250–300 MPa). Това означава, че детайлът би претърпял пластична деформация (оставащо огъване) при налягане 200 MPa. Стоманата е гранична, но концентрацията на напрежения води до локално провлачване.

- Чиста мед – напреженията са многократно по-високи от нейната ниска граница на провлачване (70–150 MPa). Медта категорично не е подходяща.

- Берилиева мед C17200 – границата на провлачване (~1000 MPa) е почти два пъти по-висока от максималните напрежения (540 MPa). Осигурява коефициент на сигурност над 1,8, което е отлично за взривни приложения[3,4,5].

6. ДИСКУСИЯ

6.1. Разлика между аналитичен и числен модел

Аналитичният модел на Ламе предполага идеален дълъг цилиндър с равномерно разпределено налягане и без концентратори на напрежения[1]. В реалната геометрия (конус + цилиндър, наличие на ръбове) се получава локално увеличение на напреженията (фактор на концентрация ≈ 1,5). Това обяснява защо ANSYS дава стойности от около 540 MPa, докато аналитичният модел дава 361 MPa. Затова за инженерни решения трябва да се използват числени симулации[1,2,5].

6.2. Препоръка

За регулаторна втулка, работеща при пиково налягане 200 MPa, се препоръчва берилиева мед C17200 (CW101C по EN). Тя осигурява висока якост, добра топлопроводност (≈105 W/m.K) и устойчивост на корозия. Ако цената е ограничаващ фактор, може да се обмисли стоманена втулка с увеличена дебелина на стената (например външен диаметър от 4,2 mm на 5 mm) или намален вътрешен диаметър, за да се намалят напреженията.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Аналитичният модел на Ламе дава $\sigma_{\mathrm{VM}} \approx 361 MPa$ за разглежданите размери, независимо от материала.

2. Числените симулации от ANSYS отчитат концентрацията на напрежения и дават стойности от порядъка на 540 MPa за всички материали.

3. Само берилиевата мед (C17200) има граница на провлачване (≈1000 MPa), достатъчно висока да понесе тези напрежения с коефициент на сигурност >1,8.

4. Алуминият, стоманата и чистата мед не са подходящи за разглежданите геометрични размери, тъй като напреженията надвишават или са близки до границата им на провлачване.

5. Препоръчва се използването на берилиева мед или, като по-евтина алтернатива, стомана с увеличена дебелина на стената.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. "Theory of Elasticity." McGraw-Hill, 1970.

[2] ANSYS Mechanical User's Guide, Release 2025 R1. Available from: https://ansyshelp.ansys.com(accessed on 16.08.26г.).

[3] ASTM International. ASTM B194 / B196 / B197 – Standard Specifications for Copper – beryllium alloys.

[4] ASM HANDBOOK COMMITTEE, ASM Handbook Volume 2: Properties and Selection Nonferrous Alloys AND Special-purpose materials. ASM International,1990.

[5] Dowling, N. E. "Mechanical Behavior of Materials." Engineering Methods for deformation, Fracture, and fatigue. 4th ed. Pearson, 2013.