International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

ПРОЕКТИРАНЕ НА СИНХРОНИЗАЦИОННИ СХЕМИ С РАЗЛИЧНИ ВИДОВЕ СИНХРОНИЗАЦИЯ НА ОСНОВАТА НА ХАОТИЧЕН МОДЕЛ С КУБИЧНА НЕЛИНЕЙНОСТ

Драгомир Чантов [1]

[1] *Технически университет - Габрово, ул. "Х. Димитър" 4, Габрово, България,*
**кореспондиращ автор: dchantov@tugab.bg*

DESIGN OF SYNCHRONIZATION SCHEMES WITH VARIOUS TYPES OF SYNCHRONIZATION BASED ON A CHAOTIC MODEL WITH CUBIC NONLINEARITY

Dragomir Chantov [1]

[1] *Technical university of Gabrovo, 4 H. Dimitar Str., Gabrovo, Bulgaria;*
**Corresponding author: dchantov@tugab.bg*

Abstract

This paper examines issues related to the phenomenon of chaotic synchronization. A specific model of a recently discovered third-order chaotic system with a single cubic nonlinearity is selected, for which schemes for identical, marginal, and oscillating synchronization are successively designed. The synchronization schemes are based on a linear-nonlinear decomposition method with additional feedback coupling designed in such way that the desired synchronization behaviour is achieved.

Keywords: chaotic systems, chaotic synchronization, non-identical synchronization, linear-nonlinear decomposition.

ВЪВЕДЕНИЕ

Хаотичните системи са детерминирани нелинейни системи със сложно динамично поведение с елемент на случайност. Обикновено математичните им модели са от нисък ред, най-често трети или четвърти. Характерно за тяхната динамика е, че тя е силно зависима от началните условия – при даден набор начални условия системата може да има поведение на напълно детерминирана система и да има атрактор от тип точка или граничен цикъл в пространството на състоянието. При друг набор начални условия системата има напълно различна динамика, отличаваща се със странен/хаотичен атрактор, движението по който става по случаен закон. Съчетанието между детерминираност и случайност, което е основната отличителна черта на хаотичните системи, ги прави интересни за анализ от много години насам. Търсят се и са намерени различни области на полезна употреба на явлението хаотична динамика, като преобладава използването им в различни комуникационни системи и системи за криптиране на данни [1,2]. При такива системи най-общо полезният или информационният сигнал се маскира с хаотичен сигнал. Обикновено се реализира система с хаотична синхронизация между две хаотич-

ни системи, които се позиционират в предавателя и в приемника на комуникационната система и по трасето между тях се предава хаотичният синхронизиращ сигнал, маскирал в себе си по определен начин информационният сигнал.

Хаотичната синхронизация е явление, при което две обикновено еднотипни хаотични системи настройват по определен начин динамиката си една към друга [3]. Известни са различни подходи за постигане на синхронизация, като при повечето от тях се реализира идентична синхронизация между системите, т.е. разликите между съответните двойки променливи на двете системи клонят към нула [4]. По-трудно се реализира неидентична синхронизация, при която част от горните разлики клонят към ненулева константа или представляват периодична функция. Тези типове синхронизация се наричат съответно изместена и осцилираща [5]. Не са известни общи универсални подходи за тяхното постигане. В същото време по-сложна от идентичната синхронизация между две хаотични системи дава възможност за повишаване на степента на защита на информацията при използването на синхронизационната схема за защита на данни.

В настоящия доклад се предлагат хаотични синхронизационни системи с три типа синхронно движение – идентична, изместена и осцилираща синхронизация. За основа е избран наскоро открит модел на непрекъсната хаотична система от трети ред, отличаващ се само с една нелинейност от трети ред, но с богата динамика – общо осем различни атрактора. Чрез използване на метод за хаотична синхронизация с линейно-нелинейна декомпозиция, предложен от автора порано, последователно са проектирани хаотични синхронизационни схеми трите желани типа идентична и неидентична синхронизация.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Преобладаващата част от известните хаотични модели са от трети ред. Сред тях сравнително малка част са тези, които съдържат само по един нелинеен елемент. Такива системи са принципно по-прости за физическа реализация на основата на електронни схеми. Прието е такъв тип хаотични модели с една нелинейност да се наричат „jerk” системи. Наскоро открит модел от този тип е описан в [6]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 + bx_2 - x_3 - x_1^2 x_2 - cx_3, \end{aligned} \tag{1}$$

където номиналните стойности на параметрите, за които системата (1) е в хаотичен режим, са:

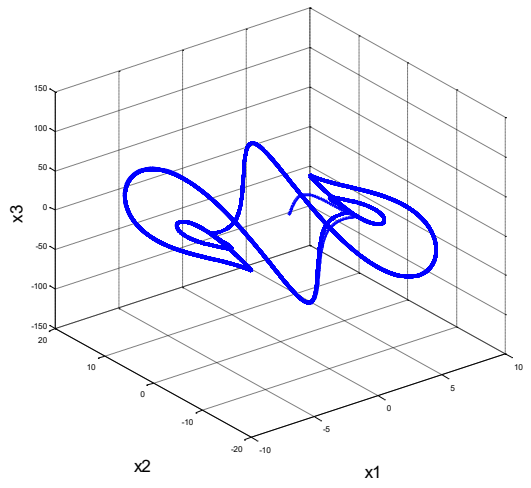
$$a = 2.5,\ b = 10,\ c = 0.4 \tag{2}$$

При първоначалния анализ на модела (1) в [6] е установено, че въпреки простата математическа структура, системата има осем различни комбинации от атрактори, в които се установява при различни комбинации от нейните параметри и начални условия. Тези комбинации включват например съвместно съществуване на два атрактора от тип точка, комбинация от атрактори от тип точка и граничен цикъл, два гранични цикъла, точка и хаотичен атрактор и др.

Тази много разнообразна динамика, включваща хаос, съчетана с простотата на математичния модел на системата, я прави привлекателна за реализиране на различни приложения, например синтез на различни синхронизационни схеми, какъвто е предметът на настоящия доклад. В [6] са изчислени показателите на Ляпунов на модела (1), които са един от тестовите инструменти за установяване на хаос. За да е дадена система хаотична, трябва максималният показател на Ляпунов да е положително число и в конкретния случай той е $\lambda_{\max} = 0.1063$. Друг инструмент за доказване хаотичността на система е показателят на Каплан –

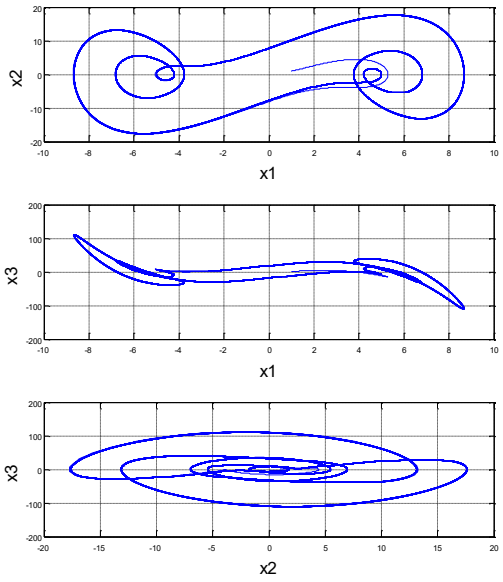
Йорк, като за модела (1) той е $D_{KY} = 2.2105$. В [6] са сравнени показателите на Каплан-Йорк на няколко популярни хаотични системи от jerk тип, като е установено, че този на системата (1) има най-голяма стойност. Това означава по-голяма сложност на динамичното поведение и непредсказуемост, което от своя страна прави системата още по-подходяща за интегриране в системи за защита на данни, стига да бъдат реализирани успешно хаотични синхронизационни схеми на нейна база.

На фиг. 1 е показан атракторът на jerk системата, когато тя е в хаотичен режим, а именно при стойности на параметрите ѝ (2) и начални условия $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = [1 \quad 1 \quad 1]^T$. За симулациите е използван програмният продукт Matlab.



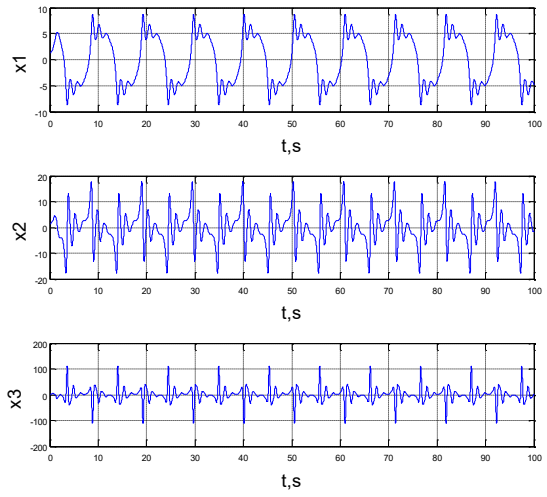
Фиг. 1. *Хаотичен атрактор на модела (1)*

На фиг. 2 са показани проекциите на хаотичния атрактор в трите фазови равнини, което позволява да се добие поясна представа за структурата на атрактора.



Фиг.2. *Проекции на хаотичния атрактор във фазовите равнини.*

На фиг. 3 е показана динамиката на трите променливи на състоянието на jerk системата във времето.



Фиг.3. *Времеви характеристики на променливите на състоянието*

Съществуват различни подходи за синтез на хаотични синхронизационни схеми. Най-общо методите за хаотична синхронизация се делят на декомпозиционни и такива с обратна връзка. За създаването на хаотични синхронизационни схеми между два jerk модела от тип (1) ще бъден използван подход, предложен от автора [7], който съчетава декомпозиционен елемент и елемент с обратна връзка, наречен модифициран метод с линейно-нелинейна декомпозиция.

Групата на декомпозиционните методи за хаотична синхронизация включва метод, известен като „линейно-нелинейна декомпозиция" [8]. При него управляващата хаотична система условно се декомпозира на линейна и нелинейна части:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \qquad (3)$$

където $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ е линейната част на $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, а $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$ е нелинейната част на $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.

Идеята на метода е свързващият сигнал между управляващата и подчинената хаотични системи в синхронизационната схема да бъде точно функцията $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$. Тогава подчинената хаотична система добива вида:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \qquad (4)$$

а системата от разсъгласуването:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) \qquad (5)$$

където $\mathbf{e}(t)$ е разсъгласуването или "грешката" между двете системи: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$.

Тогава, съгласно определението за хаотична синхронизация системите (3) и (4) ще бъдат синхронизирани, ако се изпълнява условието:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}(t) = 0. \qquad (6)$$

Такъв тип синхронизация се нарича *идентична синхронизация*.

Тъй като системата от разсъгласуването (5) е линейна, условието за устойчива идентична синхронизация (6) ще се изпълнява, когато всички собствени стойности на матрицата **A** са *отрицателни* реални числа, а ако има и комплексно спрегнати такива те са с *отрицателни реални части*.

Нека бъде синтезирана синхронизационна схема между две jerk системи с еднакъв набор от параметри (2), но в различни начални условия по метода с линейно-нелинейна декомпозиция. При това нека управляващата система се описва с уравнения (1), а подчинената, получена според метода на линейно-нелинейната декомпозиция, ще бъде:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \underline{\underline{x_1^2 x_2}} - c\tilde{x}_3, \end{aligned} \qquad (7)$$

където свързващия сигнал между управляващата и подчинената системи е $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) = x_1^2 x_2$.

Системата от разсъгласуването (5) е:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ \dot{e}_3 &= -ae_1 + be_2 - e_3 - ce_3, \end{aligned} \qquad (8)$$

т.е. матрицата **A** с коефициентите на линейната част на jerk системата е:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & b & -1-c \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

За номиналните стойности на параметрите (2) матрицата **A** има собствени стойности $\lambda_1 = 2.37$, $\lambda_2 = 0.26$ и $\lambda_4 = -4.03$. Наличието на положителни собствени стойности е индикация за

липса на хаотична синхронизация между системите (1) и (7), което е потвърдено и чрез компютърна симулация на тази синхронизационна схема.

В [7] авторът предлага група методи за синхронизация на хаотични системи, които се базират на горния метод с линейно-нелинейна декомпозиция, но дават много повече възможности за връзка между системите, отколкото единствения вариант при базовия метод, при запазване на основното му предимство – *линейна система от разсъгласуването и лесен анализ на устойчивостта*. При един от тях управляващата система от от типа (3), а подчинената система се синтезира по следния начин:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)), \quad (10)$$

където $\mathbf{B}$ е т.н. матрица на връзката за допълнително въведеното управление от тип *управление с обратна връзка към управляваната система*.

Матрицата на връзката определя към кое от уравненията на управляваната система коя от функциите $x_i(t) - \tilde{x}_i(t)$ да бъде приложена като допълнителен синхронизиращ сигнал, както и с какъв тегловен коефициент. Системата от разсъгласуването отново остава линейна:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)) - \\ - \mathbf{B}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{e}(t). \quad (11)$$

Нека според този подход бъде синтезирана хаотична синхронизационна схема между две jerk системи, като отново управляващата система е (1), а подчинената е:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + \underline{\underline{b_{11}(x_1 - \tilde{x}_1)}}, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 + \underline{\underline{b_{23}(x_3 - \tilde{x}_3)}}, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \underline{\underline{x_1^2 x_2}} - c\tilde{x}_3, \end{aligned} \quad (12)$$

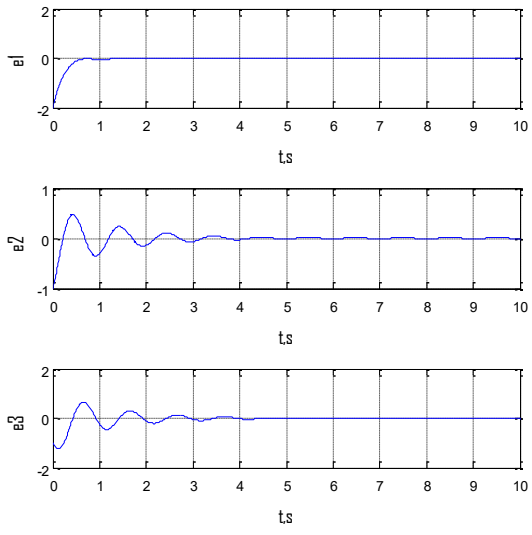
т.е. допълнителното управление е с матрица на връзката:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Тогава матрицата $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ в системата от разсъгласуването (11) ще бъде:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - b_{23} \\ -a & b & -1 - c \end{bmatrix}. \quad (14)$$

При избор на тегловни коефициенти $b_{11} = 5$ и $b_{23} = 5$ и номинални стойности на параметрите (2), матрицата $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ има собствени стойности $\lambda_{1,2} = -0.8 \pm j6.2$ и $\lambda_3 = -4.8$. И трите собствени стойности лежат в лявата половина на комплексната равнина, с което се изпълнява условието за устойчива идентична хаотична синхронизация между системите (1) и (12). На фиг. 4 са показани функциите на разсъгласуване $e_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t)$, като системите (1) и (12) са с различни начални условия. След преходен процес с големина около 4 s системите се синхронизират идентично, като разбира се запазват хаотичната си динамика.



***Фиг. 4**. Функции на разсъгласуване при идентична синхронизация*

Известно е, че е принципно възможно постигането на други видови хаотична синхронизация, различни от идентичната. Принципно, по-сложно синхронизирано движение между две хаотични системи, би дало възможност за повишаване на степента на защита в хаотични комуникационни системи. Няма универсални методи за получаване на различна от идентичната синхронизация. Известно е, че ако функцията на грешката се установява в константа, различна от нула, т.е.:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}(t) = c = const\,. \qquad (15)$$

синхронизация се нарича *изместена синхронизация*, но в литературата не е посочено как би могла да бъде получена.

Известно е само, че ако системата от разсъгласуването е линейна, условието за изместена синхронизация е *една от собствените стойности на матрицата на линейната част трябва да бъде равна на нула*, а всички останали да бъдат в лявата половина на комплексната равнина. Изхождайки от това, нека подчинената система бъде модифицирана по следния начин:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + \underline{\underline{b_{12}(x_2 - \tilde{x}_2)}},\\
\dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 + \underline{\underline{b_{23}(x_3 - \tilde{x}_3)}},\\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \underline{\underline{x_1^2 x_2}} - c\tilde{x}_3,
\end{aligned} \qquad (16)$$

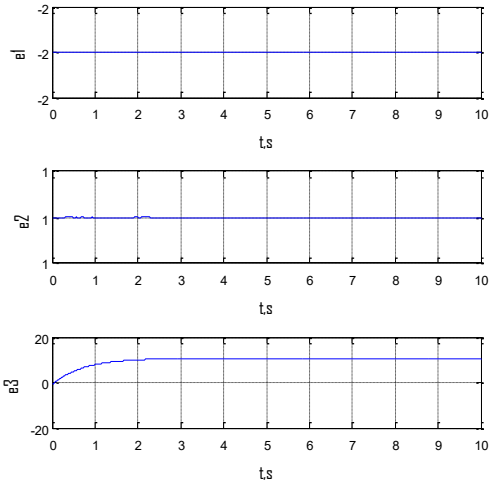
т.е. допълнителното управление е с матрица на връзката:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

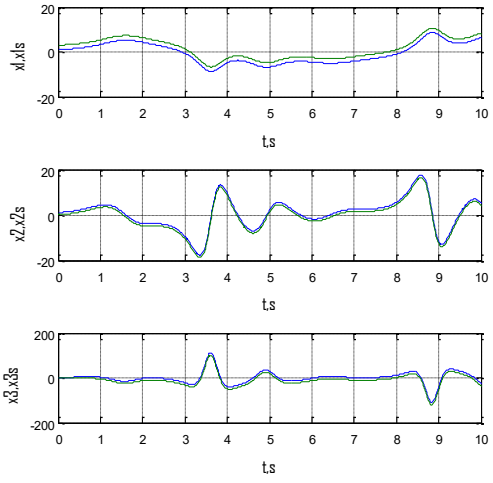
Тогава матрицата $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ в системата от разсъгласуването (11) ще бъде:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1-b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1-b_{23} \\ -a & b & -1-c \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

При избор на тегловни коефициенти $b_{12}=1$ и $b_{23}=1$ и номинални стойности на параметрите (2), матрицата $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ има собствени стойности $\lambda_{1,2}=0$ и $\lambda_3=-1.4$, с което се изпълнява условието за изместена синхронизация. На фиг. 5 са показани разликите $e_i(t)$, а на фиг. 6 – съвместната динамика на двойките променливи на двете системи, от която се вижда константното изместване в хаотичния процес на едната спрямо другата. Тази разлика зависи от началните условия и може да играе ролята на своеобразен допълнителен шифриращ ключ.



***Фиг. 5**. Функции на разсъгласуване при изместена синхронизация*



***Фиг. 6**. Динамика на променливите при изместена синхронизация*

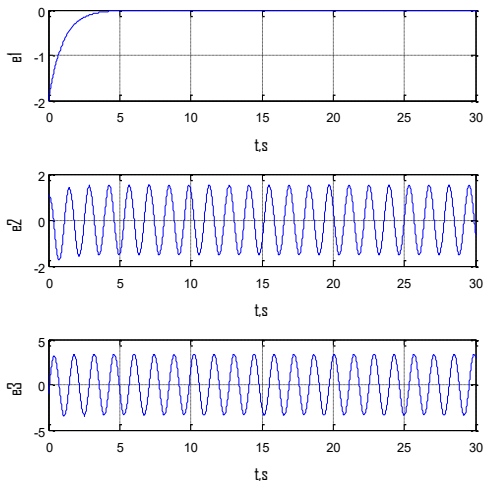
Друг тип неидентична синхронизация е *осцилиращата*, при която част от функциите $e_i(t)$ стават периодични функции. Известно е, че такъв тип синхронизация може да се получи, ако при линейна система от разсъгласуване *матрицата на линейната част има двойка комплексно-спрегнати собствени стойности с нулева реална част*, а всички останали лежат в лявата половина на комплексната равнина. Тогава нека дефинираме следната подчинена система:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + \underline{\underline{b_{11}(x_1-\tilde{x}_1)}} + \underline{\underline{b_{12}(x_2-\tilde{x}_2)}},\\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 + \underline{\underline{b_{23}(x_3-\tilde{x}_3)}},\\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \underline{\underline{x_1^2 x_2}} - c\tilde{x}_3\\ &\quad + \underline{\underline{b_{33}(x_3-\tilde{x}_3)}},\end{aligned} \tag{19}$$

Тогава матрицата $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ в (11) е:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{11} & 1-b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1-b_{23} \\ -a & b & -1-c-b_{33} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

При избор на коефициенти $b_{11}=1$, $b_{12}=1$, $b_{23}=3$ и $b_{33}=-1.4$ матрицата $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ има собствени стойности $\lambda_{1,2}=0\pm 4.47\,j$ и $\lambda_3=-1$.



***Фиг.** 7. Функции на разсъгласуване при осцилираща синхронизация*

На фиг. 7 са показани функциите $e_i(t)$ за този случай, като две от тях са периодични функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализирани са синхронизационни схеми на основата на нова хаотична система с опростен математичен модел с помощта на иновативен подход, позволяващ получаването на по-сложни типове синхронно движение. Синтезираните схеми могат да се използват като основа за хаотична система за защита на данни.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Reddy, N., A. Sadanandachary, et al., "A secure communication system of synchronized chua's circuits in LC parallel coupling," Chaos Theory and Applications 5, 2023 167–177.

[2] Cho, K., T. Miyano. Chaotic cryptography using augmented Lorenz equations aided by quantum key distribution. IEEE Trans Circ Systems-I, Vol. 62, No 2, 2015, 478-487.

[3] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, 821-824.

[4] Pecora, L., T. Carroll, G. Johnson, D. Mar, J. Heagy, Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications, Chaos 7(4), 1997, 520-543.

[5] Shahverdiev, E., Marginal hyperchaos synchronization with a single driving variable, arXiv:chao-dyn/9808013 v1, 1998, 1-4.

[6] Yan, S., J. Wang, L. Li. Analysis of a new three-dimensional jerk chaotic system with transient chaos and its adaptive backstepping synchronuous control. Integration 98 (2024) 102210.

[7] Chantov, D. Modified Lin.-Nonlin. Decomp. Method for Chaotic Synchr. Physics Letters A, Vol.372, Issue 36, 2008, 5783-5789.

[8] Yu, H., L. Yanzhu, Chaotic synchronization based on stability criterion of linear systems, Physics Letters A preprint (2003), 1-7.