International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

БИФУРКАЦИОНЕН И LYAPUNOV АНАЛИЗ НА НЕЛИНЕЙНА ХАОТИЧНА СИСТЕМА ОТ ТРЕТИ РЕД

Елена Монова[1]

[1]*Технически университет - Габрово*
**кореспондиращ автор: elena@tugab.bg*

BIFURCATION AND LYAPUNOV ANALYSIS OF A THIRD-ORDER NONLINEAR CHAOTIC SYSTEM

Elena Monova[1]

[1] *Technical University of Gabrovo*
**Corresponding author: elena@tugab.bg*

Abstract
The paper investigates the dynamic behavior of a third-order chaotic system proposed by Wang through a sequential parametric analysis of its four parameters. Bifurcation diagrams, the maximum Lyapunov exponent, and state-space trajectories are used to analyze the transitions between different dynamical regimes. The results obtained show specific changes in the character of the system when each of the parameters is changed.

Keywords: chaotic system, bifurcation diagram, maximum Lyapunov exponent .

ВЪВЕДЕНИЕ

Нелинейните динамични системи представляват важен обект на изследване в редица области на науката и инженерството поради възможността да демонстрират сложни динамични режими, включително периодично, квазипериодично и хаотично поведение.

Хаотичните системи са клас нелинейни системи, които се характеризират със силна чувствителност към малки промени на параметрите и на началните условия. Това може да доведе до сложна и непредсказуема динамика на системата, т.к. малки промени в параметрите или началните условия могат да доведат до големи различия в поведението на системата [1]. Класически пример за тримерна автономна система, проявяваща хаотично поведение, е моделът на Lorenz, който ясно показва как нелинейна система с малък брой състояния може да притежава сложно и непериодично движение [5].

В тази връзка, за да може да бъде управлявана една хаотична система, е важно да се направи изследване на преходите между различните динамични режими. За дефинирането на тези преходи се използват различни подходи. Един от тях е бифуркационният анализ. При него се проследява изменението на системната динамика при промяна на даден параметър на системата. Друг подход е пресмятането на максималния показател на Ляпунов (Maximum Lyapunov Exponent, MLE), който дава количествена оценка за експоненциалната сходимост или разходимост на траектории на системата в пространството на състоянието, започващи от близки начални условия. За хаотичните системи е характерно наличието на положителна стойност на максималния показател на Ляпунов.

Print ISSN: 1313-230X, Online ISSN: 3033-1404

През последните десетилетия са публикувани множество примери за хаотични системи от трети ред, в моделите на които има квадратични нелинейности, както и различни комбинации от линейни и нелинейни взаимовръзки между променливите на състоянието. [3, 7, 9, 11, 13]

Изследването на такива системи обикновено включва определяне на равновесните точки, построяване на траектории в пространството на състоянието, както и анализиране на поведението им при изменение на даден параметър. За анализ на хаотичното поведение на системите, в различни публикации се използват също бифуркационни диаграми и динамика на максималния показател на Ляпунов [6, 8]. В своя публикация [12] Zhang, Zhu и Yao изследват влиянието на параметрите на хаотична система от трети ред чрез бифуркационни диаграми, максималния показател на Ляпунов и фазови портрети. Други двама автори, Gholamin и Refahi Sheikhani, представят изследване на друга хаотична система от трети ред, за която са представили равновесните ѝ точки, максималния показател на Ляпунов, фазовите портрети, сеченията на Poincaré, бифуркационни диаграми и бифуркация на Hopf. [4]

В публикувано изследване на Wang е представена тримерна система с квадратични нелинейности, при която бифуркационният анализ показва промяна на динамичния режим в следствие изменението на параметрите ѝ [10].

По-пълен анализ на хаотичните системи се получава при комбиниране на бифуркационни диаграми, максималния показател на Ляпунов и графично представяне на атрактора на системата. В такъв случай чрез бифуркационната диаграма се представя промяната в динамиката на системата при постепенно изменение на даден параметър, максималният показател на Ляпунов дава количествена оценка за експоненциалното раздалечаване на близки траектории, а графичното представяне на атрактора на системата дава визуална представа за поведението ѝ – хаотичен характер, граничен режим и т.н.

Целта на настоящото изследване е да се извърши параметричен анализ на тримерната квадратична автономна система, предложена от Wang [10], чрез изследване на влиянието на всеки от четирите параметъра върху динамичното ѝ поведение. За постигане на тази цел се използват бифуркационни диаграми и максималния показател на Ляпунов, като за характерни стойности на параметрите се анализират и съответните атрактори на системата. Идеята е чрез получените резултати и извършен анализ да се определят параметричните области, в които системата има различен характер, както и особеностите на влиянието на отделните параметри върху възникването и развитието на хаотично поведение.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Моделът, предложен от Wang [10], се описва със следните уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_1 - x_2) - x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= -b x_2 + x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -c x_3 + d x_1 + x_1 x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

като стойностите на параметрите са:

$$a = 0.977,\ b = 10,\ c = 4,\ d = 0.1 \tag{2}$$

За така зададените номинални стойности на параметрите, системата има пет равновесни точки, координатите на които са:

$$x_{1e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_{2e} = \begin{bmatrix} -6.19 \\ 2.26 \\ -3.65 \end{bmatrix},\ x_{3e} = \begin{bmatrix} 6.46 \\ -2.36 \\ -3.65 \end{bmatrix},$$
$$x_{4e} = \begin{bmatrix} 6.14 \\ 1.64 \\ 2.68 \end{bmatrix},\ x_{5e} = \begin{bmatrix} -6.51 \\ -1.74 \\ 2.68 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

За системата е извършено изследване за промяна в поведението ѝ при изменение на всеки от четирите параметъра. Изследването е направено като се променя един от параметрите, а останалите

три приемат номиналните си стойности, които остават постоянни. Интервалите, за които са извършени симулациите, са:

$$\begin{aligned} a &\in [0.5, 1.5] \\ b &\in [5, 15] \\ c &\in [2, 6] \\ d &\in [-0.5, 0.5] \end{aligned} \tag{4}$$

За всяка стойност от зададения интервал на изследвания параметър, системата се интегрира числено с определена стъпка, като от установения режим се използват стойности на променливите на състоянието за построяване на бифуркационната диаграма.

Определянето на максималния показател на Ляпунов става чрез числено интегриране на системата (1) по формулата [2]:

$$\lambda_i(\mathbf{x}_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln\left|\mu_i\left[\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})...\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1)\right]\right|, \tag{5}$$

където $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k) = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k)$ е матрицата на Якоби на системата $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ за стойността на вектора $\mathbf{x}_k$ в k-тата стъпка на интегриране, а μ_i е i-тата собствена стойност.

За изследваната система, матрицата на Якоби има вида:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & -a-x_3 & -x_2 \\ x_3 & -b & x_1 \\ d+x_2 & x_1 & -c \end{bmatrix} \tag{6}$$

При удовлетворяване на условието

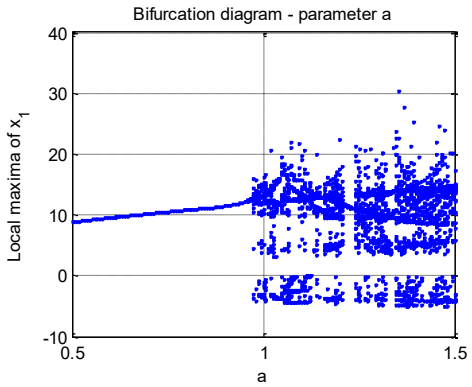
$$\lambda_{\max} > 0 \tag{7}$$

дадената система има хаотично поведение.

Резултати от параметричния анализ

Изследване влиянието на параметър a

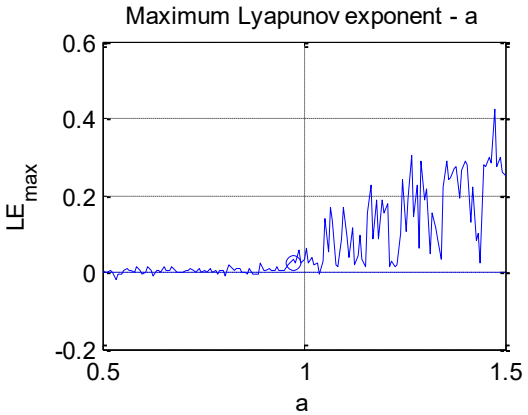
Изследваната система е симулирана с помощта на програмния продукт Matlab. За номинални стойности на параметрите b, c и d, и интервал на изменение на параметър $a \in [0.5, 1.5]$, е получена бифуркационна диаграма, показана на фиг.1.



***Фиг. 1**. Бифуркационна диаграма при изменение на параметър a в интервала* $a \in [0.5, 1.5]$

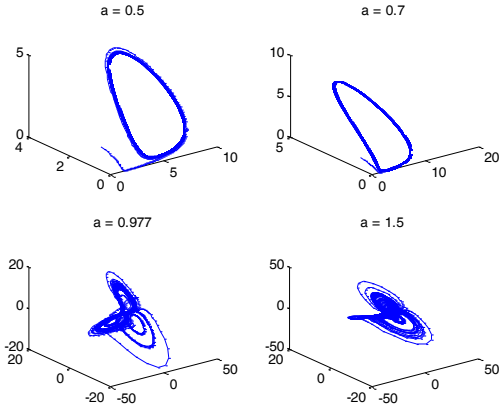
В долната част на изследвания интервал се наблюдава сравнително просто динамично поведение на системата, но с увеличаването на стойността на параметъра се появява постепенно усложняване на структурата на бифуркационната диаграма, като в областта около $a \approx 0.9$ се наблюдава преход към хаотично поведение.

На фиг.2 е представена графика на изменението на максималния показател на Ляпунов (MLE), което потвърждава получения с бифуркационната диаграма резултат – за по-малките стойности на параметъра, MLE е отрицателен или се колебае около нулата, а след $a \approx 0.9$, става положителен. С увеличаване на параметър a, MLE също нараства.



***Фиг. 2**. Максимален показател на Ляпунов за* $a \in [0.5, 1.5]$

На фиг. 3 са показани атракторите на системата за четири стойности на параметър a от зададения интервал. За малки стойности на параметъра ($a=0.5$ и $a=0.7$) се наблюдават периодични движения, а за стойности $a=0.977$ и $a=1.5$ поведението на системата е хаотично.



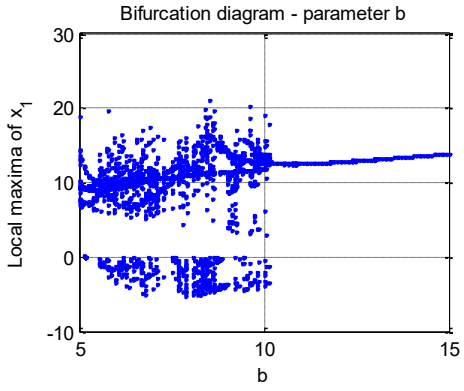
***Фиг. 3**. Траектории на системата в пространството на състоянието за различни стойности на параметър a*

Изследванията показват, че изменението на параметър a в зададения интервал влияе съществено върху характера на изследваната система, който преминава от периодично до хаотично движение.

Изследване влиянието на параметър b

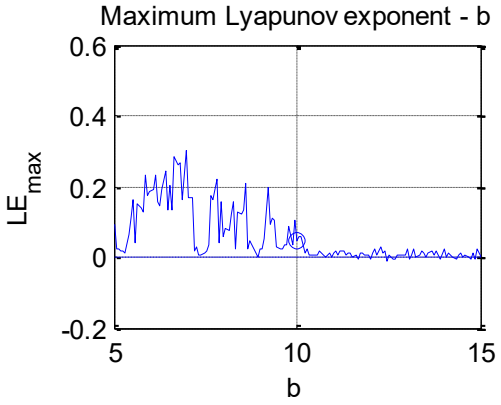
При изследване на параметър b, за параметри a, c и d са зададени номиналните им стойности, а интервалът на изменение на b е $b\in[5,15]$.

Бифуркационната диаграма е представена на фиг. 4 и показва сложна хаотична динамика за стойности на параметъра в началото на интервала до $b\approx 11$.



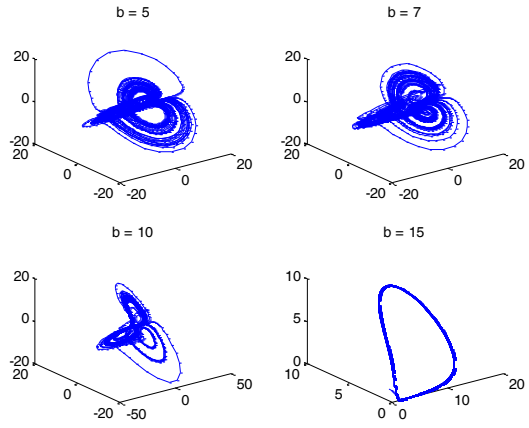
***Фиг. 4**. Бифуркационна диаграма при изменение на параметър b в интервала $b\in[5,15]$*

На фиг. 5 се вижда изменението на MLE от положителен при хаотичното поведение на системата в началото на интервала до стойности около нулата при $b>11$.



***Фиг. 5**. Максимален показател на Ляпунов за $b\in[5,15]$*

Първите три графики на фиг. 6 представляват типичен странен атрактор на хаотична система, докато на графиката за стойност на параметър $b=15$ се наблюдава периодично движение на траекторията на системата.

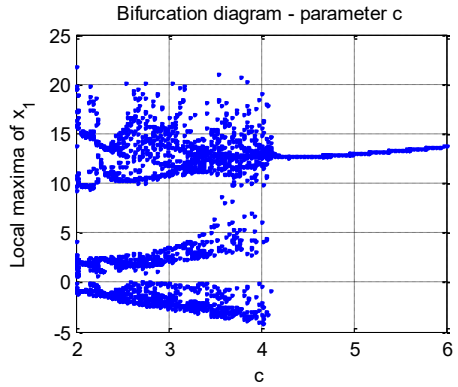


***Фиг. 6**. Траектории на системата в пространството на състоянието за различни стойности на параметър b*

Получените резултати показват, че с увеличаването на параметър b в зададения интервал, хаотичното поведение на системата се елиминира, за разлика от изследването при параметър a.

Изследване влиянието на параметър c

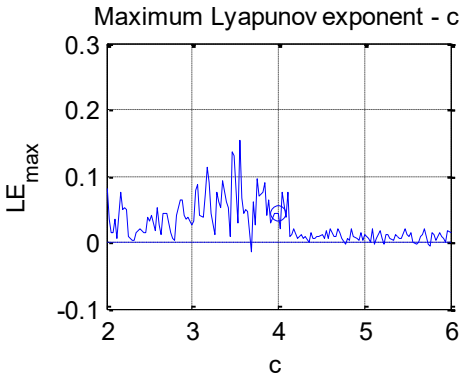
При изследване на параметър c е извършено изследване в интервала $c \in [2, 6]$, като за параметри a, b и d са зададени номиналните им стойности.



***Фиг. 7**. Бифуркационна диаграма при изменение на параметър c в интервала* $c \in [2, 6]$

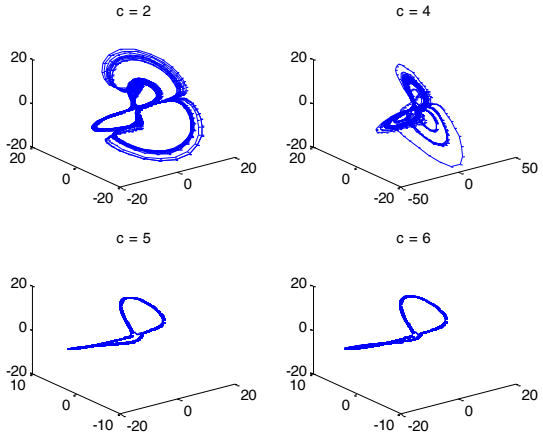
За стойностите от началото на интервала до $c \approx 4.2$, от бифуркационната диаграма на фиг.7 се вижда сложна хаотична динамика, а за по-големите стойности на параметъра поведението на системата се променя.

Динамиката на MLE, представена на фиг.8, показва положителната му стойност в началото на интервала (при хаотичното поведение на системата), с което потвърждава резултатите от бифуркационната диаграма.



***Фиг. 8**. Максимален показател на Ляпунов за* $c \in [2, 6]$

Траекториите в пространството на състоянието, представени на фиг.9, показват промяната от хаотично движение на системата (при $c = 2$ и $c = 4$) към периодично (за стойности на параметъра $c = 5$ и $c = 6$).

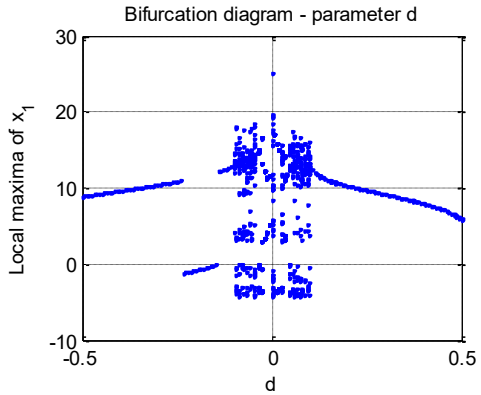


***Фиг. 9**. Траектории на системата в пространството на състоянието за различни стойности на параметър c*

Получените резултати показват, че за определен интервал на изменение на параметър c, хаотичното поведение на системата се запазва, докато при по-големи стойности на параметъра то се променя в периодично движение.

Изследване влиянието на параметър d

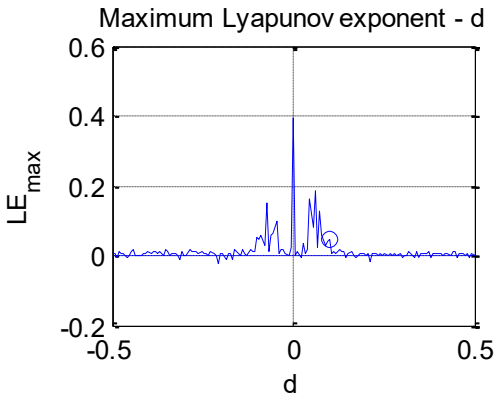
Интервалът за параметър d, в който е изследвана системата, е $d \in [-0.5, 0.5]$, като в същото време параметри a, b и c остават постоянни.



***Фиг. 10**. Бифуркационна диаграма при изменение на параметър d в интервала* $d \in [-0.5, 0.5]$

Бифуркационната диаграма, получена за интервала на изменение на параметър d, е представена на фиг.10 и се различава

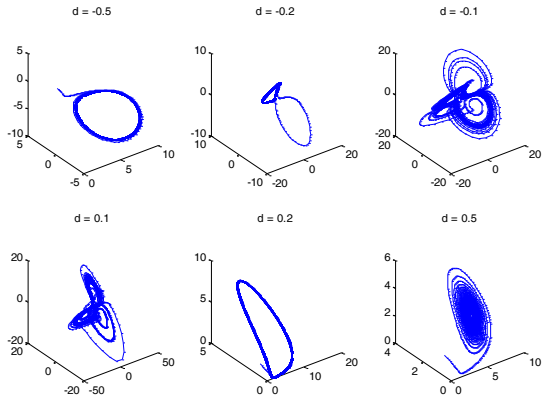
съществено от тези на параметри a, b и c. От нея се вижда, че сложна хаотична динамика системата проявява само за определен диапазон от стойности - от $d \approx -0.1$ до $d \approx 0.1$.



***Фиг. 11**. Максимален показател на Ляпунов за $d \in [-0.5, 0.5]$*

На фиг.11 се вижда динамично изменение на MLE - от стойности около нулата в началото, положителен при хаотичното поведение на системата и отново стойности около нулата в края на интервала.

Поради различното поведение на системата в този случай са направени допълнителни симулации и на фиг.12 са показани траекториите на системата за шест стойности на параметър d.



***Фиг. 12**. Траектории на системата в пространството на състоянието за различни стойности на параметър d*

За първите две стойности ($d = -0.5$ и $d = -0.2$) системата извършва периодични движения в пространството. За стойности на параметъра $d = -0.1$ и $d = 0.1$ траекторията на системата представлява странен атрактор, характерен за разглежданата хаотична система. За стойност $d = 0.2$ системата отново извършва периодично движение, а за стойност на параметъра $d = 0.5$ траекторията на системата се установява в точка от пространството на състоянието.

Обобщение на получените резултати

В Таблица 1 е представено обобщение на получените резултати.

Таблица 1

Параметър	Изследван интервал	Област с положителен MLE	Описание
a	$a \in [0.5, 1.5]$	$a > 0.9$	С нарастване на стойността на a, системата става хаотична
b	$b \in [5, 15]$	$b < 11$	С нарастване на стойността на b, системата губи хаотичния си характер
c	$c \in [2, 6]$	$c < 4.2$	С увеличаване стойността на c системата променя хаотичното си поведение към периодично
d	$d \in [-0.5, 0.5]$	$-0.15 < d < 0.15$	Системата проявява хаотичен характер в затворен интервал на изменение на параметъра d

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изследвано е динамичното поведение на квадратична нелинейна система от трети ред, предложена от Wang. За разлика от първоначалното изследване на системата [10], в настоящата работа е реализиран последователен анализ на четирите параметъра a, b, c и d.

Последователно за всеки параметър са получени бифуркационни диаграми и изменението на максималния показател на Ляпунов, а за характерни стойности на

параметрите са представени траекториите на системата в пространството на състоянието.

Получените резултати показват, че изменението на всеки от четирите параметъра може да доведе до съществено изменение на характера на системата. При изследване на параметър *a* се установи, че с нарастване на стойността, системата става хаотична, а MLE нараства и става положителен. При параметри *b* и *c*, с увеличаване на стойността им системата губи хаотичния си характер, а MLE намалява. Различно е поведението на системата при изследване на параметър *d*. В този случай системата проявява хаотичен характер само за определена област от изследвания интервал, където и MLE има положителна стойност.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Панчев, Ст., Теория на хаоса, Акад.изд. „Проф.М.Дринов“, София, 1996.

[2] Chen, G., X.Dong. From chaos to order: perspectives, methodologies and applications, Singapore, World Scientific, 1998.

[3] Chowdhury, A., A. Ray, P. Saha, On Some Chaotic Aspects and Center Manifold Reduction of ACT Nonlinear System, Journal of Applied Nonlinear Dynamics 6(3), 2017, pp. 355–367.

[4] Gholamin, P., A.H. Refahi Sheikhani, A new three-dimensional chaotic system: Dynamical properties and simulation, Chinese Journal of Physics, 55(4), 2017, pp.1300–1309.

[5] Lorenz, E., Deterministic nonperiodic flow, Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, vol. 20, pp.130-141.

[6] Marszalek, W., M. Walczak, Bifurcation Diagrams of Nonlinear Oscillatory Dynamical Systems: A Brief Review in 1D, 2D and 3D, Entropy, vol.26, 2024.

[7] Pehlivan, I., Z. Wei, Analysis, nonlinear control, and chaos generator circuit of another strange chaotic system, Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, Vol.20 (2), 2012

[8] Su, K., Dynamic analysis of a chaotic system, Optik 126, 2015, pp. 4880-4886.

[9] Vaidyanathan, S., C. K. Volos, I. M. Kyprianidis, I. N. Stouboulos, K. Rajagopal, P. Alexander, A Seven-Term Novel 3-D Chaotic System with Three Quadratic Nonlinearities and its LABVIEW Implementation, Latest Trends on Systems - Volume I.

[10] Wang, L., 3-Scroll and 4-Scroll Chaotic Attractors Generated from a New 3-D Quadratic Autonomous System, *Nonlinear Dynamics*, 56(4), 2009, pp. 453–462.

[11] Xie, Chengrong, Y. Xu, Chaos control and synchronization of a new chaotic system, International Workshop on Chaos-Fractal Theory and its Applications, 2010, pp.43-47.

[12] Zhang, X., H. Zhu, H. Yao, Analysis of a new three-dimensional chaotic system. Nonlinear Dynamics, 67, 2012, pp. 335–343

[13] Zhang X., L. Zhijun, C. De, Dynamics, circuit implementation and synchronization of a new three-dimensional fractional-order chaotic system, AEU International Journal of Electronics and Communications, 2017.