International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

МОДЕЛИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОРТОНОРМАЛНИ ФУНЦКИИ НА ЛАГЕР В ЗАВИСИМОСТ ОТ ДИНАМИЧНИТЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА АПРОКСИМИРАНИЯ ОБЕКТ

Георги Михалев[1], Пенка Иванова[2]

[1] ТУ-Габрово, гр. Габрово, България, gmihalev@tugab.bg
[2] ТУ-Габрово, гр. Габрово, България, pepi031087@gmail.com
**Георги Михалев: gmihalev@tugab.bg*

MODELING AND ANALYSIS OF LAGUERRE ORTHONORMAL FUNCTIONS DEPENDING ON THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE APPROXIMATED SYSTEM

Georgi Mihalev[1], Penka Ivanova[2]

[1] TU-Gabrovo, Gabrovo, Bulgaria;
[2] TU-Gabrovo, Gabrovo, Bulgaria;
**Georgi Mihalev: gmihalev@tugab.bg*

Abstract
The paper presents a Matlab/Simulink model for generating continuous-time Laguerre orthonormal functions for the approximation of impulse responses. Using the developed model, three types of plants are studied: of low order, of high order and with oscillations. Graphical and numerical results are presented, and conclusions are drawn on the choice of the scaling factor and the number of functions used, based on the approximation errors and the dynamics of the plant.

Keywords: Laguerre functions; orthonormal basis, impulse response approximation.

ВЪВЕДЕНИЕ

Методите за апроксимация на динамични характеристики или функции са широко изучавани и са се утвърдили като ефективни подходи при моделирането на линейни системи. Повечето от методите се фокусират върху дискретни системи[1,2,3], докато получаването на модели на непрекъснати системи посредством ортонормални функции остава по-малко изследвана област, поради необходимостта от извършване на допълнителни процедури, като изместване, нормализиране, трансформиране и скалиране.

Използването на непрекъснати ортогонални функции за описване на динамични характеристики има някои предимства, пред дискретните, като :

- По-широко приложение, поради възможността от по-ясно представяне на изменението на параметрите върху характеристиките на системата.
- Представяне на точен непрекъснат модел, получен чрез идентификация на системата с дискретизация.

Този тип преобразования имат и съответно основен недостатък, които най-общо може да се опише с сложно изчисление на представянето на системата в пространство на състоянието.

Print ISSN: 1313-230X, Online ISSN: 3033-1404

Полезността на ортонормалните базисни функции идва тогава когато се успее да се подберат такива функции които да отразят доминиращите характеристики на системата с последващо описание на системата с възможно най-малък брой базисни функции. Именно това продължава да представлява интерес от класическата работа на Лий и Винер до съвременната теория на управлението, поради големия брой приложения в синтеза на моделно зависими регулатори.

По специално в областта на теория на управлението, обработка на сигнали, идентификация на системите, голям интерес представляват функциите на Лагер с използването на импулсната характеристика на системите. Моделите на Лагер представляват специален случай на общите ортонормални базиси, където полюсите на предавателната функция на системата са ограничени до крайно множество. Освен че по конструкция функциите на Лагер удовлетворяват граничното условие за безкрайност, те притежават и прости рационални трансформации на Лаплас, което съответства на физически реализуеми, устойчиви импулсни характеристики.

В статията се разглежда възможността за моделиране на ортонормалните функции на Лагер в среда на Matlab/Simulink. Изследва се влиянието на скалиращия фактор при апроксимиране на импулсната характеристика на системи в зависимост от динамичните характеристики на обекта.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Апроксимацията на импулсни характеристики на устойчиви системи, чрез разложения по ортогонални функции представлява голям интерес. В текущата статия тези разложения се дискутират в непрекъснато време. Разглеждането на дискретните такива следва аналогична логика.

Разглеждат се импулсната характеристика $h(t)$ принадлежаща на пространството L^2, и набор от ортонормални функции $\{\phi_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ принадлежащи към същото пространство. Апроксимацията на $h(t)$ чрез линейна комбинация на първите M ортонормални функции $\phi_m(t)$ включва минимизирането на грешката:

$$\zeta_M = \int_0^{\infty} |h(t) - \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_m(t)|^2 \, dt \quad (1)$$

Минимизирането на (1) се постига когато коефициентите на разложение c_m се определят посредством:

$$c_m = \int_0^{\infty} h(t)\phi_m(t) \, dt, \quad (2)$$
за $m = 0,1, \dots, M-1$.

Стойността на този минимум се определя, чрез:

$$\min\zeta_M = \| h(t) \|^2 - \sum_{m=0}^{M-1} |c_m|^2, \quad (3)$$

така че,

$$\sum_{m=0}^{M-1} |c_m|^2 \leq \| h(t) \|^2. \quad (4)$$

В граничния случай на $M \to \infty$, (4) преминава в неравенството на Бесел [4].

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 \leq \| h(t) \|^2 \quad (5).$$

Поради ортогоналността на базисните функции коефициентите c_m, които минимизират (3), не зависят от реда M на апроксимацията. Това означава, че добавянето на още един член $c_M\phi_M(t)$ подобрява апроксимацията, без да се налага преизчисляване на вече намерените коефициенти c_m за $m = 0,1, \dots, M-1$.

Второто важно свойство, което се изисква от базиса, е пълнотата. Системата $\{\phi_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ се нарича пълна в L^2, когато всяка функция $h(t)$ от това пространство може да бъде апроксимирана с произволно малка грешка, чрез линейна комбинация на функциите $\phi_m(t)$. Еквивалентно, системата $\{\phi_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ е пълна в L^2 тогава, когато от условието $\langle h(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$, следва, че функцията $h(t) \in L^2$ е тъждествено равна на нула почти навсякъде.

С други думи, в една пълна система не съществува ненулева функция, ортого-

нална на всички базисни функции едновременно. Ортонормирана и същевременно пълна в L^2 система функции $\phi_m(t)$ образува ортонормиран базис на L^2.

При наличие на ортонормиран базис неравенството на Бесел (5) се изпълнява като равенство и приема вида:

$$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|^2 = \| h(t) \|^2 = \int_0^{\infty}|h(t)|^2\,dt \text{ , (6)}$$

а грешката на апроксимацията се стреми към нула с неограничено нарастване на реда M:

$$\lim_{M\to\infty}\zeta_M = 0. \quad (7)$$

ФУНКЦИИ НА ЛАГЕР И ТЯХНОТО ПРЕДСТАВЯНЕ В ПРОСТРАНСТВО НА СЪСТОЯНИЯТА

Функциите на Лагер[5] представляват система от ортонормални функции, които удовлетворяват условията за ортогоналност и пълнота, и за всяко $p > 0$ се дефинират по следния начин:

$$\begin{gathered} l_1(t) = \sqrt{2p}e^{-pt} \\ l_2(t) = \sqrt{2p}(2pt+1)e^{-pt} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \quad (8)$$

$$l_i(t) = \sqrt{2p}\,\frac{e^{pt}}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}\left(t^{i-1}e^{-2pt}\right),$$

където p се нарича мащабиращ фактор.

Мащабиращият фактор определя експоненциалното затихване на функциите на Лагер и служи като задаван от потребителя параметър, който се избира в зависимост от приложението.

Формирането на система от функциите на Лагер (8) се извършва чрез прилагане на преобразуването на Лаплас върху множеството от функции:

$$\begin{gathered} L_1(s) = \int_0^{\infty} l_1(t)e^{-st}dt = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \\ L_2(s) = \int_0^{\infty} l_2(t)e^{-st}dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)}{(s+p)^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_i(s) = \int_0^{\infty} l_i(t)e^{-st}dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{i-1}}{(s+p)^i} \end{gathered} \quad (9)$$

където $L_i(t)$ се наричат също филтри на Лагер и чрез последователното им свързване се образува система от функции на Лагер.

Генерирането на функциите на Лагер може да бъде извършено чрез използване на (8) или (9), но по-практично е те да бъдат представени в пространство на състоянията. Тази форма е по-компактна, особено като се има предвид приложението ѝ при апроксимацията на системи. Ортонормалните функции на Лагер са представени подробно във форма на пространство на състоянията в [6], където векторът на състоянието първоначално се избира като $L(t) = [l_1(t) \quad l_2(t) \quad \ldots \quad l_N(t)]^T$. При начални условия на този вектор от вида $L(0) = \sqrt{(2p)}\,[1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]^T$, диференциалното представяне за функциите на Лагер има вида:

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_1(t) \\ \dot{l}_2(t) \\ \ldots \\ \dot{l}_N(t) \end{bmatrix} = M_p.\begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \ldots \\ l_N(t) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

където:

$$M_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & \ldots & 0 \\ -2p & -p & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2p & \cdots & -2p & -p \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Решението на диференциалното уравнение (10) определя множеството от функции на Лагер $L(t)$ за $i = 1, 2, \ldots, N$ във вида:

$$L(t) = e^{M_p t}L(0). \quad (12)$$

АПРОКСИМИРАНЕ НА ИМПУЛСНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИИ НА ЛАГЕР

Импулсната характеристика се представя като ортонормално разлагане, чрез функции на Лагер по следния начин:

$$h(t) = c_1 l_1(t) + c_2 l_2(t) + \cdots + c_i l_i(t) \quad (13)$$

За да бъде валидно (13), импулсната характеристика трябва да удовлетворява условието за L^2-устойчивост, което за разглеждания клас системи изисква всички полюси да бъдат разположени строго в лявата половина на комплексната равнина и да е изпълнено следното условие:

$$\int_0^\infty h^2(t)dt < \infty \qquad (14)$$

За този тип системи, за $\varepsilon > 0$, съществува число N, което показва броя на използваните ортонормални функции, така че:

$$\int_0^\infty \left(h(t) - \sum_{i=1}^{N} c_i l_i(t)\right)^2 dt < \varepsilon \qquad (15)$$

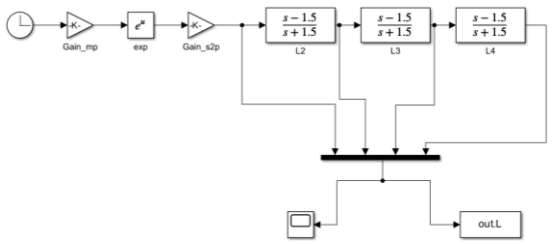
От условие (15) се вижда, че точността на апроксимацията ще нараства с увеличаването на N, за всяка стойност на мащабиращия фактор $p > 0$. Ако функцията $h(t)$ е известна, оптималните коефициенти могат да бъдат намерени чрез минимизиране на целевата функция от (15). Като се вземе предвид ортонормалното свойство на функциите на Лагер, коефициентите c_i се намират чрез формула (2), където функцията $\phi_{\mathrm{m}}(t)$ е съответната функция на Лагер $l_i(t)$:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^\infty h(t)l_1(t)dt \\ c_2 &= \int_0^\infty h(t)l_2(t)dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_i &= \int_0^\infty h(t)l_i(t)dt \end{aligned} \qquad (16)$$

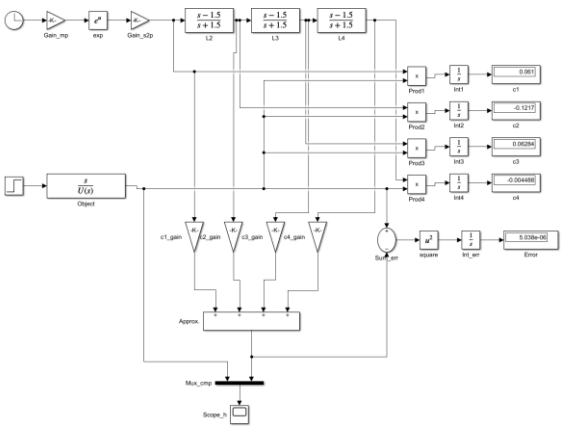
Съществено затруднение възниква в случаите, когато импулсната характеристика на изследваната система не е зададена в явен аналитичен вид. Тогава определянето на коефициентите на разложението се осъществява посредством подходящи алтернативни методи и оптимизационни критерии, съобразени със спецификата на разглеждания динамичен процес.

СИМУЛАЦИОННИ РЕЗУЛТАТИ

За провеждане на симулационните експерименти и изследване е разработен модел в среда на Matlab/Simulink. Реализирането на функции на Лагер в непрекъснат вид в среда на Simulink изисква използването на блок “Clock”, за да се елиминира необходимостта от импулсен вход. Този тип реализация съответства на мрежа на Лагер и е представен на фиг. 1.



***Фиг. 1**. Simulink модел на първите 4 функции на Лагер*

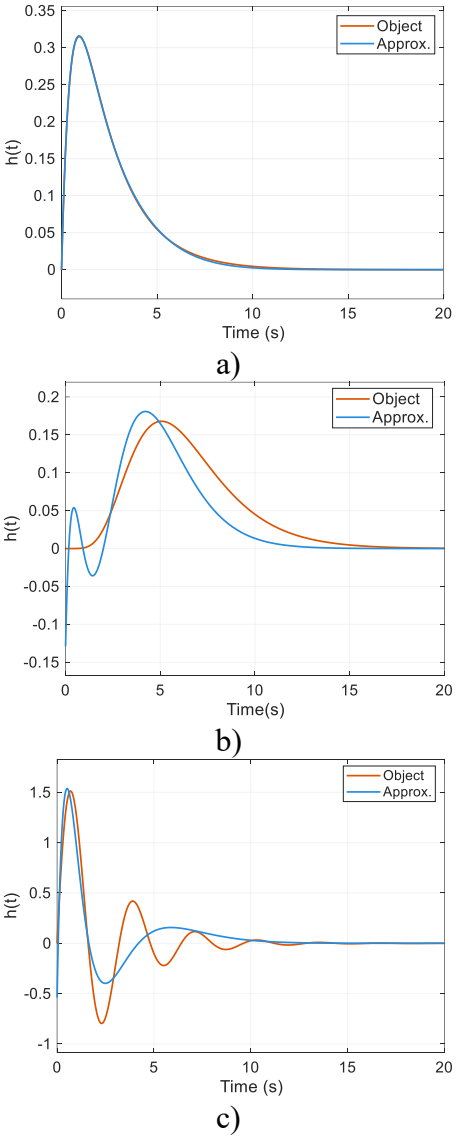


***Фиг. 2**. Simulink модел за апроксимация на системи с функции на Лагер при N=4*

С използване на разработените Simulink модели се изследват три вида предавателни функции на системи, които са съответно на система от нисък ред, система от висок ред и система с осцилации. Първите две системи имат само реални полюси, докато втората има една двойка комплексно спрегнати такива. Предавателните характеристики на системите са подбрани с подходящо статично усилване, за да може получените графики да са съизмерими. Изследваните предавателни функции са представени в таблица 1.

Таблица 1. *Предавателни функции на изследваните системи*

Вид на системата	Предавателна функция
С-ма от нисък ред	$W_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2.5s + 1}$
С-ма от висок ред	$W_2(s) = \dfrac{36}{den}$ $den = s^8 + 15.3s^7 + 97.35s^6 + 335.47s^5 + 682.5s^4 + 836.32s^3 + 600.65s^2 + 230.4s + 36$
С-ма с осцилации	$W_3(s) = \dfrac{4}{s^2 + 0.8s + 4}$



Фиг. 3*. Графични резултати при апроксимиране на h(t) на изследваните системи*

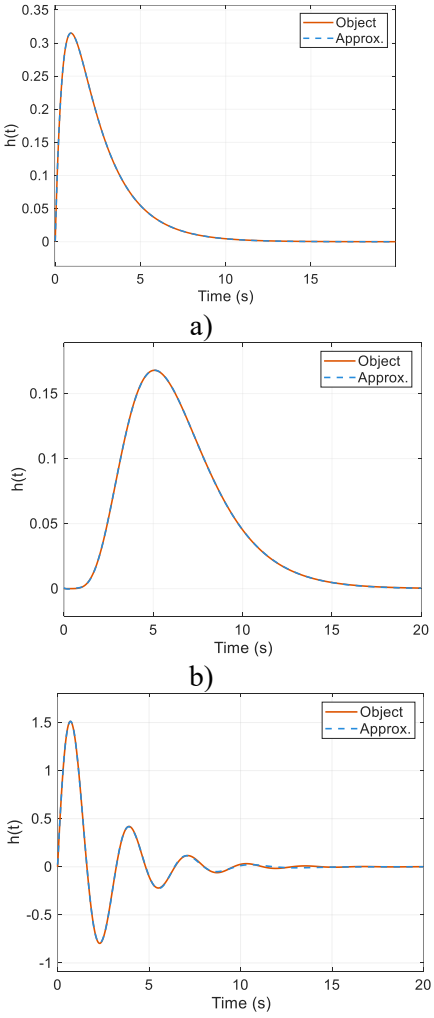
На фиг. 3.a),b),c) са показани графичните резултати от апроксимирането на импулсните характеристики на системите при N=4 и p=1.

Таблица 2. *Числови резултати при апроксимиране на $W_i(p)$ с N=1 и p=1*

W(p)	Грешка	$\| \boldsymbol{h(t)} \|^2$	% от $\| \boldsymbol{h(t)} \|^2$
$\boldsymbol{W_1(s)}$	$3{,}04.10^{-5}$	0.2	0.0152%
$\boldsymbol{W_2(s)}$	$1{,}48.10^{-2}$	0.11	12.862%
$\boldsymbol{W_3(s)}$	$5{,}79.10^{-1}$	2.50	23.192%

В таблица 2 са представени числовите резултати за графиките от фиг. 3, получени в среда на Matlab.

От резултатите представени на фиг. 3 и таблица 2, ясно се вижда влошаването на качеството на апроксимация с увеличаването на реда и сложността на предавателната функция.



Фиг. 4*. Графични резултати при апроксимиране на h(t) с оптимални p с използване на до N=20*

На фигурите (фиг. 4.a),b),c)) и таблица 3 по-долу са показани реалните и апроксимираните импулсни характеристики, за най-добрите стойности на p при избор на N до 20.

Таблица 3. *Числови резултати при апроксимиране на $W_i(p)$ при оптимални p с използване на до 20 ортонормални функции*

W(p)	p	N	Грешка	$\| \boldsymbol{h(t)} \|^2$	% от $\| \boldsymbol{h(t)} \|^2$
$\boldsymbol{W_1(s)}$	0,96	6	$1{,}642.10^{-7}$	0,20	0,0001 %
$\boldsymbol{W_2(s)}$	0,94	8	$2{,}768.10^{-7}$	0,12	0,0002 %
$\boldsymbol{W_3(s)}$	2,81	20	$1{,}004.10^{-3}$	2,50	0,0402 %

Получените резултати ясно показват по добрите апроксимационни възможности на функциите на Лагер за обекти с реални полюси. За първите две системи получената най-ниска грешка се получава при избор на задаване на стойност на p, която е средногеометрична стойност на полюсите на системите, като логично с нарастване на реда на системата се увеличават и броя на необходимите функции. Особен интерес представляват резултатите за третата система с предавателна функция $W_3(s)$, за която не може да се даде точна зависимост при избора на p, тъй като постигната грешка от $1{,}004.10^{-3}$ е при $p = 2{,}81$, което е различно от собствената честота системата от $\omega_n = 2\,rad/s$. Броят на функциите в базиса са избрани по логаритмичен закон спрямо грешката, което потвърждава теоретичните основи за функциите Лагер. Може да се заключи, че колкото по-бавно затихват осцилациите в обекта, толкова по-голям брой функции са необходими, за да се постигне зададена точност на апроксимацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статията се изследва апроксимацията на импулсни характеристики на три вида системи, посредством ортонормални функции на Лагер. Разлагането на характеристиките на системите е изследвано, посредством разработени модели в среда на Matlab/Simulink, в които необходимостта от импулсно входно въздействие е премахната с цел намаляване на свързаните с него числени грешки. Получените резултати показват, че за обекти само с реални полюси функциите на Лагер се справят добре, докато при системи с комплексно спрегнати такива сходимостта е значително по-бавна. Анализа на зависимостта на динамичните характеристики на апроксимирания обект от скалиращия фактор и броя функции, водят до насока за търсене на други базиси.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cui, X. Z., Zhou, W. X., & Hong, H. P. Multiple discrete orthonormal S-transforms and its application in analyzing, modelling, and simulating random process and field. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *202*, 110682, 2023.

[2] Stanisławski, R., Kozioł, K., & Rydel, M., Implementation of fractional-order difference via Takenaka-Malmquist functions. *Applied Mathematics and Computation*, *434*, 127452, 2022.

[3] Darabseh, T., Tarabulsi, A., & Mourad, A. H. I., Discrete-Time model predictive controller using Laguerre functions for active flutter suppression of a 2D wing with a flap. *Aerospace*, *9*(9), 475, 2022.

[4] Dragomir, S. S., A note on Bessel's inequality. *RGMIA research report collection*, *4*(2), 2012.

[5] Mihalev, G., Yordanov, S., Ormandzhiev, K., Stoycheva, H., & Todorov, T., Synthesis of model predictive control for an electrohydraulic servo system using orthonormal functions. In *2024 5th International Conference on Communications, Information, Electronic and Energy Systems (CIEES)*, 2024.

[6] Mihalev, G., Approximation of Dynamic Systems Using Deep Neural Networks and Laguerre Functions. *Engineering Proceedings*, *104*(1), 22, 2025.