International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ОРТОГОНАЛНИ ФУНКЦИИ НА ЛЕЖАНДР

Пенка Иванова[1], Георги Михалев[2]

[1]ТУ-Габрово, гр. Габрово, България, pepi031087@gmail.com
[2]ТУ-Габрово, гр. Габрово, България, gmihalev@tugab.bg
**Пенка Иванова:pepi031087@gmail.com*

TRANSFORMATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL FUNCTIONS

Penka Ivanova[1], Georgi Mihalev[2]

[1]TU-Gabrovo, Gabrovo, Bulgaria;
[2] TU-Gabrovo, Gabrovo, Bulgaria;
**Penka Ivanova: pepi031087@gmail.com*

Abstract
This paper presents the transformations and analysis of Legendre functions as an important class of special functions with extensive applications in mathematical analysis, approximation theory, and the study of dynamic systems. It examines the theoretical foundations of their definition, orthogonality, and normalization, as well as the construction of an appropriate orthonormal system of functions. The significance of normalization in ensuring that the resulting functions are mutually orthogonal and have unit norm in the corresponding function space is emphasized. Legendre functions are studied in both the time and operator domains, with particular attention to the effect of scaling on their temporal localization and dynamic behavior. Graphs illustrate the changing of the first functions in the system before and after transformation. Their characteristic properties, capabilities, and constraints are discussed, along with their principal applications in the approximation and modeling of dynamic processes.

Keywords: Legendre functions; orthonormal systems; function transformation; temporal scaling; dynamic system modeling.

ВЪВЕДЕНИЕ

Съвременните изследвания показват, че полиномите и функциите на Лежандр се използват основно при разработването на спектрални [1], колокационни [2,3] и методи на Галеркин [4] за числено решаване на диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения. Основните им предимства са свързани с ортогоналността, високата точност и възможността за свеждане на сложни операторни задачи до крайномерни алгебрични системи, докато ограниченията обикновено произтичат от нарастването на изчислителната сложност, чувствителността към негладки решения и необходимостта от подходящ избор на броя и мащаба на базисните функции.

В редица научни изследвания функциите на Лежандр се използват като базис при разработването на числени методи за решаване на диференциални уравнения, както и при математическото описание и изследване на динамични процеси. При динамични задачи в [5] се използват матричен метод на Лежандр–Галеркин за изчисляване на отговора на конструкции с една и много степени на свобода. За решаване на дробни уравнения се съчетават спектрална апроксимация по Лежандр с времеви схеми, за да постигнат

Print ISSN: 1313-230X, Online ISSN: 3033-1404

висока пространствена точност [6,7]. Общото ограничение е усложняването на изчисленията при нелинейност, дробна динамика или решения с ниска регулярност. В [8] се предлага колокационен метод, основан на линейни мултивълнови функции на Лежандр, за числено решаване на интегро-диференциални уравнения. В теоретичен план се способча бързата сходимост на изместените полиноми на Лежандр при аналитични решения [9], но и ограниченията на диференчната им матрица при методи, които трябва да запазват физични инварианти.

В настоящия доклад се представя преобразуването на ортогонални функции на Лежандр в ортонормална система и значението на тази конструкция за апроксимацията и моделирането на динамични процеси. Ортогонализацията се разбира като построяване на взаимно ортогонални функции, а ортонормализирането — като допълнително привеждане на всяка функция към единична норма. Разгледани са също влиянието на скалирането върху времевата локализация на получените функции и възможностите за тяхното изследване във времевата и операторната област.

Ортонормализирането има следните основни цели:

- да се получи система, в която функциите запазват взаимната си ортогоналност и имат единична норма в избраното функционално пространство;
- да се определят непосредствено коефициентите при разлагане на дадена функция по базиса на Лежандр;
- да се осигури последователна основа за числено изследване и моделиране на динамични процеси, включително след преобразуване на функциите към положителната полуос.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Функциите на Лежандр са избрани за предмет на настоящото изследване, поради ясната математическа структура и добре установените свойства на полиномите, от които се изграждат. Тяхната ортогоналност върху интервала [-1,1] предоставя естествена основа за конструиране на ортонормална система. За тази цел полиномите се нормализират и чрез подходящо преобразуване се пренасят върху положителната времева полуос, като се отчитат условията, необходими за запазване на ортонормалността.

Получените функции се изследват последователно във времевата и в операторната област чрез прилагане на преобразуването на Лаплас. Диференциалното им представяне е необходимо, за да се изяснят зависимостите между отделните функции и начинът, по който се изменя системата във времето. Разглежда се и скалирането като средство за изменение на скоростта на затихване и времевата локализация.

ДЕФИНИРАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ЛЕЖАНДР

Полиномите на Лежандр се дефинират чрез формулата на Родригес[10] в интервала $x \in [-1,1]$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (1)$$

За пренасяне на полиномите от интервала $[-1,1]$ върху интервала $[0,1]$ се въвеждат изместените полиноми на Лежандр:

$$\tilde{P}_n(u) = P_n(2u-1), u \in [0,1] \qquad (2)$$

Това се налага поради факта, че стандартните функции не могат да се нормират в интервала $[0,+\infty)$, тъй като са ортогонални само в интервала $[-1,1]$. Първите четири изместени полинома са:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0(u) &= 1,\\ \tilde{P}_1(u) &= 2u-1,\\ \tilde{P}_2(u) &= 6u^2-6u+1,\\ \tilde{P}_3(u) &= 20u^3-30u^2+12u-1\end{aligned} \quad (3)$$

Тези полиноми удовлетворяват условието за ортогоналност:

$$\int_0^1 \tilde{P}_n(u)\tilde{P}_m(u)\,du = \frac{1}{2n+1}\delta_{nm}, \quad (4)$$

където δ_{nm} е символът на Кронекер.

ЛАПЛАСОВИ ОБРАЗИ НА ОРТОНОРМАЛНИТЕ ФУНКЦИИ НА ЛЕЖАНДР

Преобразуването на Лаплас позволява времевото представяне на всяка функция да се свърже с нейния образ по комплексната променлива. По този начин могат да се проследят както общите свойства на системата, така и различията между отделните ѝ елементи. Лапласовите образи имат рационален вид, което създава удобна основа за установяване на зависимости между образите на последователните функции. Извеждането на общ израз показва, че тези зависимости се запазват при произволен номер на функцията в системата.

Посредством математическа индукция, общия израз за лапласовото преобразуване на вече нормираните функции на Лежандр се получава като:

$$\begin{aligned}\Phi_1(s) &= \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\\ \Phi_2(s) &= \sqrt{3}\,\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi_3(s) = \sqrt{5}\,\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{5}{2}\right)}$$

$$\Phi_n(s) = \sqrt{2n+1}\,\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(s-k-\frac{1}{2}\right)}{\prod_{k=0}^{n}(s+k+\frac{1}{2})}$$

ДИФЕРЕНЦИАЛНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ОРТОНОРМАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

Полученото представяне на Лапласовите образи позволява да се изведе рекурентна зависимост между две последователни функции. За $n \geq 1$ е изпълнено:

$$\frac{\Phi_n(s)}{\Phi_{n-1}(s)} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}\,\frac{s-n+\frac{1}{2}}{s+n+\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Диференциалното представяне на функциите на Лежандр е възможно да се направи чрез формулите (7) или операторно им представяне чрез (8), които ще могат да се използват за получаването им в пространство на състоянията.

Така векторът на състоянията $\boldsymbol{\varphi}(t) = [\varphi_0(t)\ \varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\,\varphi_3(t)\ldots\ \varphi_n(t)\,]^T$ за функциите на Лежандр се получава след решаване на системата от диференциални уравнения:

$$\left|\begin{aligned}\dot{\varphi}_0(t) &= -\frac{1}{2}\varphi_0(t)\\ \dot{\varphi}_1(t) &= -\sqrt{3}\varphi_0(t) - \frac{3}{2}\varphi_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t) &= -\sqrt{5}\varphi_0(t) - \sqrt{15}\varphi_1(t) - \frac{5}{2}\varphi_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t) &= -\sqrt{7}\varphi_0(t) - \sqrt{21}\varphi_1(t) - \sqrt{35}\varphi_2(t) - \frac{7}{2}\varphi_3(t)\\ &\ldots\\ \dot{\varphi}_n(t) &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_n(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(2n+1)(2k+1)}\,\varphi_k(t)\end{aligned}\right. \quad (7)$$

Тогава системата може да бъде записана в матрична форма $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = A_L\,\boldsymbol{\varphi}(t)$, т. е. :

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_0(t)\\ \dot{\varphi}_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t)\\ \dots\\ \dot{\varphi}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ -\sqrt{3} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots\\ -\sqrt{5} & -\sqrt{15} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & \dots\\ -\sqrt{7} & -\sqrt{21} & -\sqrt{35} & -\frac{7}{2} & 0 & \dots\\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\sqrt{2n+1} & -\sqrt{3(2n+1)} & -\sqrt{5(2n+1)} & -\sqrt{5(2n+1)} & \dots & \dots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\varphi_0(t)\\ \varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\\ \dots\\ \varphi_n(t)\end{bmatrix} \quad (8)$$

Началното условие за тази система е:

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \dots & \sqrt{2n+1}\end{bmatrix}^T \quad (9)$$

Матрицата A_L е долнотриъгълна и нейните собствени стойности са диагоналните ѝ елементи:

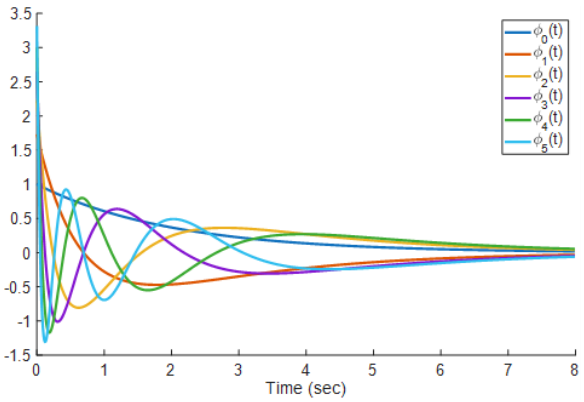
$$\lambda_n=-\left(n+\tfrac{1}{2}\right), n=1,2,\dots \quad (10)$$

Тъй като всички собствени стойности са отрицателни, решението на системата е асимптотично устойчиво. Векторът на ортонормалните функции се определя от:

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{A_L t}\,\boldsymbol{\varphi}(0) \quad (11)$$

Полученото представяне позволява функциите, конструирани чрез изместените полиноми на Лежандр, да бъдат генерирани като решение на линейна система от диференциални уравнения.

На фиг. 1 са представени графиките на функциите на Лежандр за $N=6$, т.е. за първите шест функции, реализирани в среда на MATLAB.



***Фиг. 1**. Функции на Лежандър за $N=6$ без скалиращ фактор*

Както се вижда от фиг. 1 така генерираните функции на Лежандр са експоненциално затихващи ортонормални функции и могат да се използват за апроксимиране на сложни динамични характеристики. Това което нямат обаче е елемент, с който да може да се осъществява процедура по настройка. Решението на тази задача е въвеждането на скалиращ фактор p.

Скалиращият фактор влиза в матрицата A_L (умножавайки цялата матрица по p) и в началния вектор $\varphi(0)$ (умножен по $\sqrt{p}$)). Това се налага поради смяната на времевата скала $t\to pt$ във функциите, като производната по времето въвежда за множител скалиращия фактор за цялата система, а наличието на $\sqrt{p}$ в началните условия оставя базисът ортонормиран в $L^2[0,+\infty)$. С формули (12) и (13) са показани диференциалното представяне и матрицата A_L от пространство на състоянията, които са съответно:

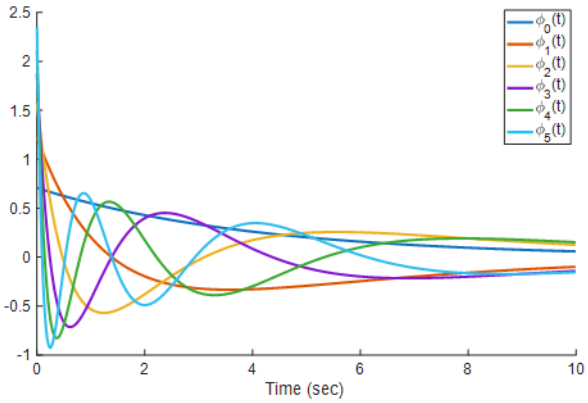
$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_0(t)&=-\frac{p}{2}\varphi_0(t)\\ \dot{\varphi}_1(t)&=-p\sqrt{3}\,\varphi_0(t)-\frac{3p}{2}\varphi_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)&=-p\sqrt{5}\,\varphi_0(t)-p\sqrt{15}\,\varphi_1(t)-\frac{5p}{2}\varphi_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t)&=-p\sqrt{7}\,\varphi_0(t)-p\sqrt{21}\,\varphi_1(t)-p\sqrt{35}\,\varphi_2(t)\\ &\quad-\frac{7p}{2}\varphi_3(t)\\ &\dots\dots\dots\dots\end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\varphi}_n(t)=-p\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\varphi_n(t)-p\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(2n+1)(2k+1)}\;\varphi_k(t),$$

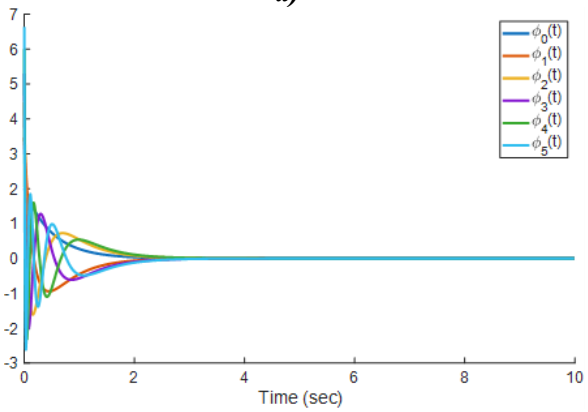
и матричната форма на системата $\dot{\varphi}(t)=A_L\varphi(t)$, където:

$$\mathrm{A}_L = -p\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{3} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{5} & \sqrt{15} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{7} & \sqrt{21} & \sqrt{35} & \frac{7}{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \sqrt{2n+1} & \sqrt{3(2n+1)} & \sqrt{5(2n+1)} & \sqrt{5(2n+1)} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (13)$$

На фиг. 2 а) и б) са представени графиките на функциите на Лежандр вече с въведен скалиращ фактор за $N = 6$, съответно при $p = 0.5$ и $p = 4$, отново първите шест функции, реализирани в средата MATLAB.



а)



б)

***Фиг. 2**. Функции на Лежандр за $N = 6$: а) при $p = 1$; б) при $p = 4$.*

Геометричният смисъл на ортогоналността може да бъде обяснен чрез принципа на площите. Графиката на произведението на две различни функции на Лежандр образува положителни и отрицателни области спрямо абсцисната ос. При интегриране техните знакови площи взаимно се компенсират, поради което общата стойност на интеграла е нула. Следователно ортогоналността не означава, че произведението на функциите е нула във всяка точка, а че неговата сумарна знакова площ върху целия интервал е нулева.

Нормализацията представлява допълнително мащабиране на всяка функция, така че нейната норма да бъде равна на единица. Тя не променя формата, нулите и взаимната ортогоналност на функциите, а единствено уеднаквява техния мащаб. По този начин се получава ортонормална система, при която различните функции са взаимно ортогонални, а всяка от тях притежава единична енергия. Това улеснява определянето на коефициентите при функционални разложения и подобрява числената устойчивост на апроксимационните процедури.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия доклад е проследено преобразуването на ортогоналните функции на Лежандр в ортонормална система от функции, дефинирана върху положителната времева полуос.

Представянето на получените функции във времевата и операторната област разкрива допълващи се страни на тяхната структура. Лапласовите образи дават алгебрично представяне на системата, а диференциалните зависимости описват

връзките между функциите при изменението им във времето. Разгледаното скалиране позволява да се променят скоростта на затихване и времевата локализация. Графичните изображения, реализирани в среда на MATLAB онагледяват тези изменения при първите функции от системата.

Получените резултати очертават последователен подход за конструиране и изследване на функции на Лежандр, пригодни за представяне на динамични процеси. Същевременно те показват значението на правилния избор на преобразуване и мащаб, когато системата се използва в конкретна задача.

БЛАГОДАРНОСТИ: *Проучването е проведено в рамките на проект НИП2026-8 „Интегриран подход за устойчива индустрия чрез интелигентни и иновативни технологии“, финансиран от НИР на ТУ Габрово.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zhang, Y., Yu, X., & Wang, Z. Efficient and accurate Legendre spectral element methods for one-dimensional higher order problems. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 14*(2), 461–487.https://doi.org/10.4208/nmtma.OA-2020-0082, 2021.

[2] Olayiwola, M. O., Adebisi, A. F., & Arowolo, Y. S., Application of Legendre polynomial basis function on the solution of Volterra integro-differential equations using collocation method. *Cankaya University Journal of Science and Engineering, 17*(1), 41–51, 2020.

[3] Nemati, S., Lima, P. M., & Sedaghat, S., Legendre wavelet collocation method combined with the Gauss–Jacobi quadrature for solving fractional delay-type integro-differential equations. *Applied Numerical Mathematics, 149*, 99–112, 2020. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.05.024

[4] Panigrahi, B. L., Mandal, M., & Nelakanti, G., Legendre multi-Galerkin methods for Fredholm integral equations with weakly singular kernel and the corresponding eigenvalue problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 346*, 224–236, 2019. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.07.010

[5] Momeni, M., et al., Dynamic response analysis of structures using Legendre–Galerkin matrix method. *Applied Sciences, 11*(19), 9307, 2021.

[6] Zaky, M. A., et al., Alikhanov Legendre–Galerkin spectral method for the coupled nonlinear time-space fractional Ginzburg–Landau complex system. *Mathematics, 9*(2), 183, 2021.

[7] Li, Y., Xu, Y., Liu, Y., & Shen, Y., A fast θ scheme combined with the Legendre spectral method for solving a fractional Klein–Gordon equation. *Fractal and Fractional, 7*(8), 635, 2023.

[8] Khan, I., Asif, M., Amin, R., Al-Mdallal, Q., & Jarad, F., On a new method for finding numerical solutions to integro-differential equations based on Legendre multi-wavelets collocation. *Alexandria Engineering Journal, 61*(4), 3037–3049, 2022.

[9] Iserles, A., Stable spectral methods for time-dependent problems and the preservation of structure. *Foundations of Computational Mathematics, 25*, 683–723, 2025**.**

[10] Fai, L. C., *Special Functions in Physics and Engineering: A Renewed Approach with Applications*. IOP Publishing. ISBN: 978-0-7503-6149-1, 2024.