International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

РАЗРАБОТВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ШЕСТСТЕПЕННА ПЛАТФОРМА НА СТЮАРТ ЗА РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЦИФРОВ ДВОЙНИК

Даниел Савов, Димитър Дичев, Хасан Хасанов

Технически университет – Габрово, Габрово, България
**кореспондиращ автор: didomf@gmail.com*

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF A SIX-DEGREE-OF-FREEDOM STEWART PLATFORM FOR DIGITAL TWIN IMPLEMENTATION

Daniel Savov, Dimitar Dichev, Hasan Hasanov

Technical University of Gabrovo, Gabrovo, Bulgaria
**Corresponding author: didomf@gmail.com*

Abstract: This paper presents the development of a mathematical model of a six-degree-of-freedom Stewart platform intended for the implementation of a digital twin of the mechanism. The model is based on a geometric description of the platform and mathematical relationships for solving the forward and inverse kinematics problems. To determine the spatial position and orientation of the moving platform from given linear actuator lengths, a numerical approach based on Newton's iterative method and nonlinear least-squares optimization is presented. The Jacobian matrix describing the local sensitivity of the kinematic transformations is derived. A generalized algorithmic framework is proposed, integrating both modes of kinematic transformation and the verification of the admissibility of the resulting configurations. The developed model provides a computational foundation for implementing a digital twin capable of simulating the spatial motions of the platform and establishes a basis for further investigation of its kinematic characteristics and metrological accuracy.

Keywords: Stewart platform; mathematical model; forward and inverse kinematics; Jacobian matrix; digital twin

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Динамичните измервания се различават съществено от статичните поради необходимостта от отчитане на времето като допълнителен параметър на измервателния процес. Това налага да се отчитат не само метрологичните характеристики на измервателните средства, но и техните динамични свойства, които определят способността им да възпроизвеждат измененията на измерваните величини във времето [1]. В резултат на това, оценяването на динамичната точност се превръща в значително по-сложна задача, изискваща специализирани методи и средства за метрологично осигуряване [2].

Един от основните проблеми при изследването на динамичната точност е необходимостта от възпроизвеждане на пространствени движения с предварително зададени и достатъчно точно определени характеристики. В това отношение шестстепенните паралелни механизми, известни като хексаподи или платформи на Стюарт [3,4], предоставят широки възможности за изграждане на еталонни системи за динамично калибриране. Чрез шест независимо управлявани линейни актуатора те позволяват възпроизвеждането на сложни пространствени движе-

Print ISSN: 1313-230X, Online ISSN: 3033-1404

ния, включващи три транслационни и три ротационни степени на свобода. Това ги прави подходящи за изследване на динамичните характеристики на инерциални измервателни системи, датчици за ориентация и други измервателни средства, предназначени за работа върху движещи се обекти [5].

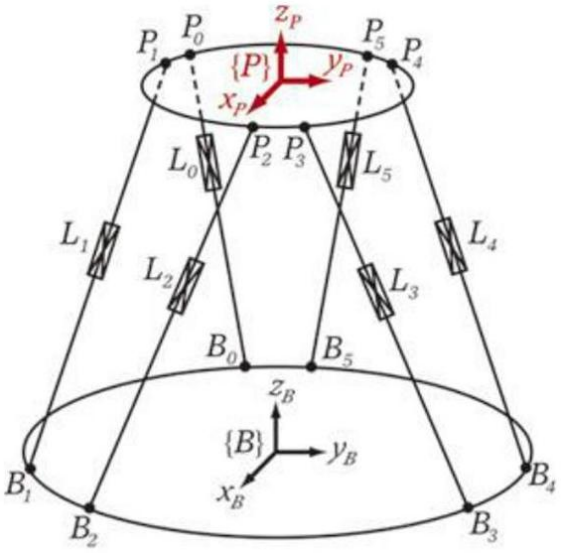
Използването на хексаподите като еталонни системи обаче изисква точно математическо описание на тяхното движение и отчитане на влиянието на геометричните и кинематичните характеристики на механизма [4]. Възможност за решаването на тези задачи предоставя разработването на цифрови двойници, които обединяват математическото моделиране, числените алгоритми и визуализацията на пространствените движения в единна програмна среда [6,7]. Чрез тях могат да се изследват различни конфигурации на механизма, да се анализира поведението му и да се създадат предпоставки за последващо оценяване и коригиране на грешките [8,9].

Във връзка с това целта на настоящата работа е разработването на математически модел на шестстепенна платформа на Стюарт, предназначен за изграждане на цифров двойник на механизма. Моделът се основава на геометричното описание на платформата и математическите зависимости за решаване на правата и обратната кинематична задача, като осигурява двупосочно преобразуване между пространственото положение и ориентацията на подвижната платформа и дължините на линейните актуатори. Разработеният модел създава математическа основа за числено моделиране и визуализация на пространствените движения, както и за последващо изследване на кинематичните характеристики и метрологичната точност на хексапода.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ПЛАТФОРМАТА НА СТЮАРТ

Платформата на Стюарт представлява шестстепенен паралелен механизъм, състоящ се от неподвижна основа и подвижна платформа, свързани посредством шест линейни актуатора (фиг. 1). Изменението на дължините на актуаторите осигурява пространствено движение на подвижната платформа с три транслационни и три ротационни степени на свобода.

За математическото описание на механизма се въвеждат две декартови координатни системи: $O_B X_B Y_B Z_B$, неподвижно свързана с основата, и $O_P X_P Y_P Z_P$, свързана с подвижната платформа. Присъединителните точки на актуаторите към неподвижната основа са означени с B_i, а съответните точки върху подвижната платформа — с P_i, където $i = 0,1,\dots,5$. Дължината на всеки актуатор е означена с L_i.



Фиг. 1. *Геометрична схема на шестстепенна платформа на Стюарт*

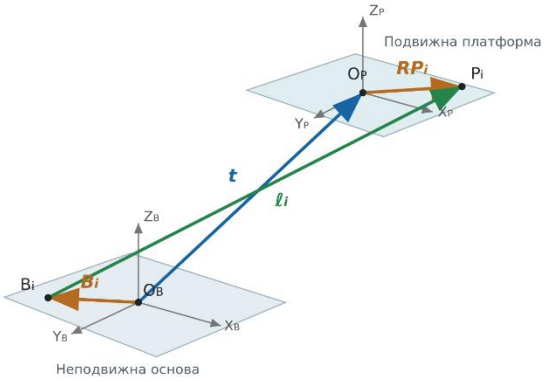
Положението на подвижната платформа се определя чрез координатите x, y и z на началото O_P, изразени в неподвижната координатна система $O_B X_B Y_B Z_B$. Ориентацията ѝ се задава чрез три ъгъла φ, θ и ψ, съответно за завъртания около осите X, Y и Z. По този начин положението и ориентацията на подвижната платформа се описват с шесткомпонентния вектор

$$q = [x\ y\ z\ \varphi\ \theta\ \psi]^T. \quad (1)$$

За определяне на ориентацията се използва последователността на завъртанията ZYX, при която матрицата на ориентацията на подвижната координатна система спрямо неподвижната има вида

$$R = R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_X(\varphi). \quad (2)$$

За извеждане на кинематичните зависимости се разглежда произволно избран актуатор, свързващ точките B_i и P_i. Векторната схема на този актуатор е представена на фиг. 2.



Фиг.2. *Векторна схема на кинематичния модел*

В съответствие с векторната схема на фиг. 2 геометричните зависимости за произволно избрания актуатор се определят чрез следните вектори:

$t = \overrightarrow{O_B O_P}$ - векторът на преместването на началото O_P на подвижната координатна система спрямо началото O_B на неподвижната координатна система;

$B_i = \overrightarrow{O_B B_i}$ - радиус-векторът на присъединителната точка B_i, изразен в неподвижната координатна система;

$P_i = \overrightarrow{O_P P_i}$ - радиус-векторът на присъединителната точка P_i, зададен в подвижната координатна система;

$\ell_i = \overrightarrow{B_i P_i}$ - векторът, свързващ двете присъединителни точки на i-тия актуатор и насочен от неподвижната основа към подвижната платформа.

Тъй като векторът P_i е зададен в подвижната координатна система, за използването му във векторните зависимости е необходимо координатите му да бъдат преобразувани към неподвижната система. Това преобразуване се извършва чрез матрицата на ориентацията R. Полученият вектор RP_i има същото начало O_P и край P_i, но координатите му вече са изразени в неподвижната координатна система.

От векторната схема на фиг. 2 следва, че радиус-векторът на точката P_i спрямо началото O_B е

$$\overrightarrow{O_B P_i} = t + RP_i. \quad (3)$$

Следователно векторът на i-тия актуатор се определя от зависимостта

$$\ell_i = \overrightarrow{O_B P_i} - \overrightarrow{O_B B_i} = t + RP_i - B_i. \quad (4)$$

Дължината на актуатора е равна на нормата на този вектор:

$$L_i = \|\ell_i\| = \|t + RP_i - B_i\|,\ i = 0,1,\dots,5. \quad (5)$$

Зависимост (5) представлява решението на обратната кинематична задача. При зададени положение и ориентация на подвижната платформа чрез нея се определят необходимите дължини на шестте линейни актуатора.

При правата кинематична задача са известни дължините L_i на шестте актуатора, а се търси шесткомпонентният вектор $\boldsymbol{q}$, определящ положението и ориентацията на подвижната платформа. За целта се формира система от шест нелинейни уравнения:

$$r_i(q) = \|t + RP_i - B_i\| - L_i = 0,\ i = 0,1,\dots,5. \quad (6)$$

Решението на тази система се определя числено. В разработения цифров двойник са реализирани итерационни методи, основани на метода на Нютон и метода на нелинейните най-малки квадрати. При числено решение се използва Якобиановата матрица, която характеризира чувствителността на дължините на актуаторите към измененията на положението и ориентацията на подвижната платфор-

ма.

За числено решаване на системата от нелинейни уравнения (6) се използва Якобиановата матрица, която характеризира изменението на дължините на линейните актуатори при малки изменения на положението и ориентацията на подвижната платформа. При приетото представяне на пространственото положение чрез шесткомпонентния вектор $\mathbf{q}$, Якобиановата матрица се определя като

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_0}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial L_0}{\partial \psi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L_5}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial L_5}{\partial \psi} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

където $\mathbf{L} = [L_0, L_1, \dots, L_5]^T$ е векторът на дължините на актуаторите.

За определяне на елементите на Якобиановата матрица се използва зависимост (5). Като се въведе единичният вектор по направлението на i-тия актуатор

$$\mathbf{u}_i = \frac{\boldsymbol{\ell}_i}{L_i}, \tag{8}$$

частните производни на неговата дължина по транслационните координати се определят чрез

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{u}_i^T. \tag{9}$$

Частните производни по ъглите на ориентацията се получават чрез диференциране на матрицата на завъртане $\mathbf{R}$, представена чрез матрицата (2). По този начин i-тият ред на Якобиановата матрица има вида

$$\mathbf{J}_i = \left[\mathbf{u}_i^T \ \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi}\mathbf{P}_i \ \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta}\mathbf{P}_i \ \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi}\mathbf{P}_i\right]. \tag{10}$$

Получената Якобианова матрица позволява да се установи локалната зависимост между малките изменения на пространственото положение на платформата и съответните изменения на дължините на актуаторите:

$$\Delta\mathbf{L} \approx \mathbf{J}(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q}. \tag{11}$$

При решаване на правата кинематична задача системата (6) се представя чрез вектора на остатъците

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = [r_0(\mathbf{q})\ r_1(\mathbf{q})\ \cdots\ r_5(\mathbf{q})]^T. \tag{12}$$

Използвайки метода на Нютон, на всяка итерация се определя корекцията $\Delta\mathbf{q}_k$ чрез решаване на линейната система

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_k)\Delta\mathbf{q}_k = -\mathbf{r}(\mathbf{q}_k). \tag{13}$$

След това се изчислява следващото приближение

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta\mathbf{q}_k. \tag{14}$$

Итерационният процес продължава до изпълнение на предварително зададени критерии за сходимост, свързани с големината на остатъците и измененията на компонентите на вектора $\mathbf{q}$.

При необходимост правата кинематична задача може да бъде формулирана и като задача за нелинейни най-малки квадрати:

$$\min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{r}(\mathbf{q})\|^2 \tag{15}$$

Тази формулировка позволява използването на числени алгоритми за минимизиране на остатъците, включително при затруднена сходимост на стандартния метод на Нютон.

Якобиановата матрица има съществено значение и за анализа на кинематичните характеристики на платформата. Нейният ранг и обусловеност характеризират локалната чувствителност на кинематичните преобразувания и позволяват идентифициране на конфигурации, при които решаването на правата кинематична задача става числено затруднено.

По този начин математическият модел обединява геометричното описание на механизма, правата и обратната кинематика и числените алгоритми за определя-

не на пространственото положение на подвижната платформа. Той представлява изчислителната основа за разработването на цифров двойник на шестстепенната платформа на Стюарт.

Разработеният математически модел осигурява двупосочно преобразуване между положението и ориентацията на подвижната платформа и дължините на линейните актуатори. Той представлява основата на цифровия двойник, чрез който се реализират численото моделиране и тримерната визуализация на пространствените движения на механизма.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ МОДЕЛ ПРИ ИЗГРАЖДАНЕ НА ЦИФРОВ ДВОЙНИК

Разработеният математически модел осигурява основните кинематични преобразувания, необходими за изграждането на цифров двойник на шестстепенна платформа на Стюарт. Неговото приложение се основава на взаимовръзката между геометричните параметри на механизма, пространственото положение и ориентацията на подвижната платформа и дължините на шестте линейни актуатора. Чрез обединяването на правата и обратната кинематична задача в единна изчислителна структура се създават условия за моделиране на различни пространствени конфигурации и анализ на кинематичните характеристики на платформата

3.1. Организация на кинематичните преобразувания

В зависимост от зададените входни параметри математическият модел осигурява два основни режима на кинематично преобразуване.

При първия режим като входни данни се задават шестте компонента на вектора q, определящи положението и ориентацията на подвижната платформа. Чрез решаване на обратната кинематична задача по зависимост (5) се определят дължините на шестте линейни актуатора, необходими за реализиране на зададената пространствена конфигурация.

При втория режим входните данни представляват дължините на линейните актуатори. Чрез числено решаване на системата от нелинейни уравнения (6) се определят координатите на положението и ъглите на ориентацията на подвижната платформа. За целта се използват итерационните зависимости (13) и (14), като Якобиановата матрица осигурява необходимата информация за локалната чувствителност на кинематичния модел.

Двата режима използват общо геометрично описание на механизма и осигуряват двупосочно преобразуване между пространствената конфигурация на платформата и дължините на актуаторите. Това позволява математическият модел да бъде използван както за определяне на необходимите управляващи геометрични параметри, така и за възстановяване на пространственото положение по зададени дължини.

3.2. Алгоритмична структура на математическия модел

За реализиране на кинематичните преобразувания е предложена обобщена алгоритмична структура, която обединява входните геометрични данни, изчислителните зависимости и получаваните резултати.

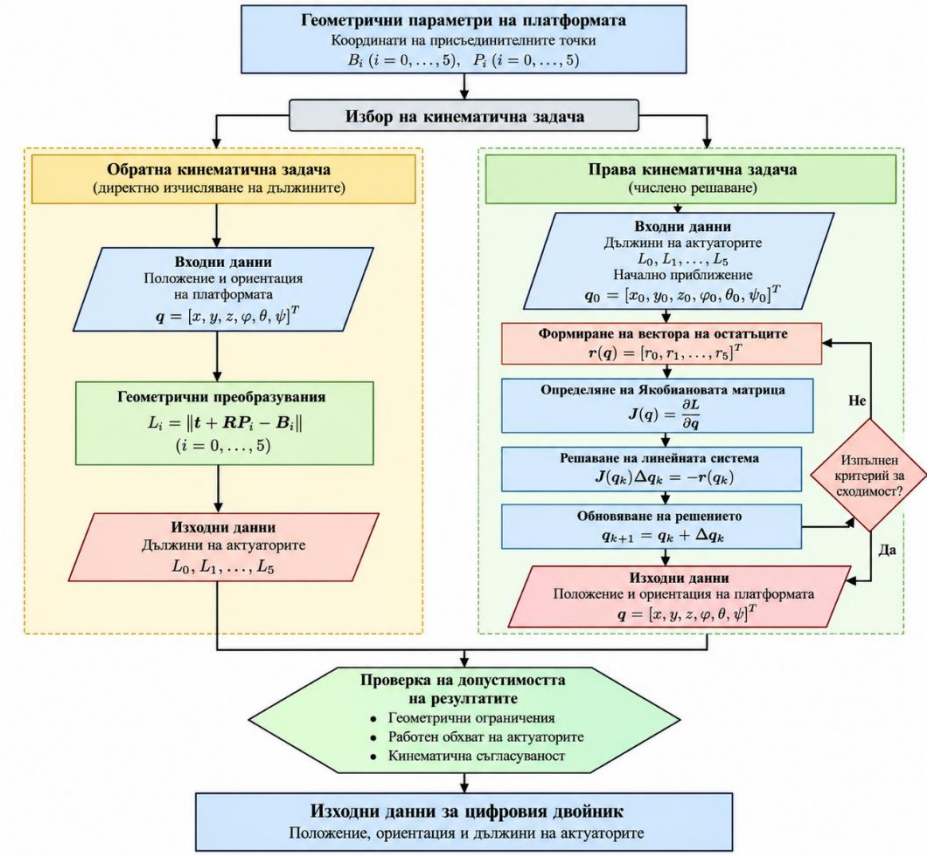
Първоначално се задават геометричните параметри на платформата, включващи координатите на присъединителните точки на актуаторите към неподвижната основа и подвижната платформа. В зависимост от избрания режим се въвеждат пространственото положение и ориентацията на платформата или дължините на шестте актуатора.

При решаване на обратната кинематична задача се извършва непосредствено изчисляване на дължините на актуаторите чрез геометричните зависимости на модела. При правата кинематична задача се задава начално приближение за пространствената конфигурация, формира се векторът на остатъците и се определя

Якобиановата матрица. Чрез последователни итерации се получава решение, удовлетворяващо предварително зададените критерии за сходимост.

Алгоритмичната структура предвижда и проверка за допустимост на получените конфигурации спрямо зададените геометрични и кинематични ограничения на механизма. При успешно изпълнение на съответното преобразуване се формират изходните данни, определящи дължините на актуаторите или пространственото положение и ориентацията на подвижната платформа.

Обобщената алгоритмична структура на математическия модел е представена на фиг. 3.



Фиг. 3. *Обобщена алгоритмична структура на математическия модел за изграждане на цифров двойник на платформата на Стюарт*

3.3. Възможности за използване на математическия модел в цифровия двойник

Предложената алгоритмична организация позволява математическият модел да бъде използван като основно изчислително ядро при разработването на цифров двойник на платформата на Стюарт. Чрез него могат да се определят пространствени конфигурации на механизма, да се изчисляват съответните дължини на актуаторите и да се осигуряват необходимите геометрични данни за тримерна визуализация.

Съвместното използване на правата и обратната кинематична задача създава възможност за проверка на числената съгласуваност на кинематичните преобразувания чрез сравняване на зададените и възстановените пространствени конфигурации. Допълнително Якобиановата матрица позволява анализ на локалната чувствителност на механизма към измененията на дължините на актуаторите и установяване на конфигурации с неблагоприятна обусловеност.

Разработеният математически модел създава предпоставки и за последващо метрологично изследване на платформата, включително оценяване на влиянието на грешките на линейните актуатори върху пространственото положение и ориентацията на подвижната платформа. По този начин той представлява основа за разширяване на функционалните възможности на цифровия двойник с методи за анализ и повишаване на точността на хексапода.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е разработен математически модел на шестстепенна платформа на Стюарт, обединяващ геометричното описание на механизма и математическите зависимости за решаване на правата и обратната кинематична задача. За числено решаване на правата задача е представен итерационен подход с използване на Якобиановата матрица, който позволява определяне на пространственото положение и ориентацията на подвижната платформа по зададени дължини на линейните актуатори.

Предложена е обобщена алгоритмична структура, осигуряваща двупосочно кинематично преобразуване и проверка на допустимостта на получените конфигурации. Разработеният модел създава изчислителна основа за изграждане на цифров двойник на платформата на Стюарт и за последващи изследвания на нейните кинематични характеристики и метрологична точност.

БЛАГОДАРНОСТИ: *Това изследване е финансирано от университетски проект НИП2026-16.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] S. Eichstädt, C. Elster, T. J. Esward, and J. P. Hessling, “Deconvolution filters for the analysis of dynamic measurement processes: A tutorial,” Metrologia, vol. 47, no. 5, pp. 522–533, 2010. DOI: 10.1088/0026-1394/47/5/003

[2] S. Eichstädt, C. Elster, I. M. Smith, and T. J. Esward, “Evaluation of dynamic measurement uncertainty – an open-source software package to bridge theory and practice,” Journal of Sensors and Sensor Systems, vol. 6, pp. 97–105, 2017. DOI: 10.5194/jsss-6-97-2017.

[3] D. Stewart, “A platform with six degrees of freedom,” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 180, no. 1, pp. 371–386, 1965. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1965_180_029_02.

[4] J.-P. Merlet, Parallel Robots, 2nd ed. Dordrecht: Springer, 2006. DOI: 10.1007/1-4020-4133-0.

[5] Y.-S. Kim, H. Shi, N. Dagalakis, J. Marvel, and G. Cheok, “Design of a six-DOF motion tracking system based on a Stewart platform and ball-and-socket joints,” Mechanism and Machine Theory, vol. 133, pp. 84–94, 2019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.10.021.

[6] M. Grieves and J. Vickers, “Digital Twin: Mitigating unpredictable, undesirable emergent behavior in complex systems,” in Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems, 2017, pp. 85–113. DOI: 10.1007/978-3-319-38756-7_4.

[7] F. Tao, H. Zhang, A. Liu, and A. Y. C. Nee, “Digital twin in industry: State-of-the-art,” IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 15, no. 4, pp. 2405–2415, 2019. DOI: 10.1109/TII.2018.2873186.

[8] P. Campanini and G. Ferretti, “Object-oriented models of parallel manipulators,” Proceedings of the International Modelica Conference, 2021. DOI: 10.3384/ecp21181241.

[9] X. Ding and J. Xing, “Modeling and implementation of a real-time digital twin for the Stewart platform with real-time trajectory computation,” PeerJ Computer Science, vol. 11, article e2892, 2025. DOI: 10.7717/peerj-cs.2892.