International Scientific Conference 20 UNITECH 26

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
19-21 November 2026
GABROVO

РАЗРАБОТВАНЕ НА ЦИФРОВ ДВОЙНИК НА ШЕСТСТЕПЕННА ПЛАТФОРМА НА СТЮАРТ И ЧИСЛЕНА ПРОВЕРКА НА КИНЕМАТИЧНИТЕ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ

Даниел Савов

Технически университет – Габрово, Габрово, България
**кореспондиращ автор: didomf@gmail.com*

DEVELOPMENT OF A DIGITAL TWIN OF A SIX-DEGREE-OF-FREEDOM STEWART PLATFORM AND NUMERICAL VERIFICATION OF KINEMATIC TRANSFORMATIONS

Daniel Savov

Technical University of Gabrovo, Gabrovo, Bulgaria
**Corresponding author: didomf@gmail.com*

Abstract: *This paper presents the development of a digital twin of a six-degree-of-freedom Stewart platform based on a software implementation of a mathematical model for solving the forward and inverse kinematics problems. A standalone software application with a modular architecture, a graphical user interface, and interactive three-dimensional visualization of the mechanism has been developed. The computational core implements iterative numerical methods for determining the spatial position and orientation of the moving platform from specified linear actuator lengths. A numerical study involving 1,000 test configurations was conducted by consecutively solving the inverse and forward kinematics problems. A numerical solution was successfully obtained for all configurations in no more than four iterations. The maximum position reconstruction error was* 9.8084×10^{-13} *m, and the maximum orientation error was* 2.9802×10^{-8} *rad. The results confirm the numerical consistency of the implemented kinematic transformations within the investigated domain and provide a basis for subsequent metrological characterization of the platform.*

Keywords: Stewart platform; digital twin; software implementation; forward and inverse kinematics; numerical consistency.

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Шестстепенните платформи на Стюарт представляват паралелни механизми, които осигуряват пространствено движение с три транслационни и три ротационни степени на свобода посредством шест независимо управлявани линейни актуатора [1,2]. Техните конструктивни и кинематични особености създават възможности за приложение в роботиката, прецизните позициониращи системи и средствата за възпроизвеждане на пространствени движения [2,3]. Особено перспективно е използването им в системи за динамично калибриране, при които се изисква възпроизвеждане на движения с предварително зададени характеристики.

Ефективното използване на тези механизми изисква не само разработването на математически модел, но и неговата програмна реализация, осигуряваща решаване на кинематичните задачи, визуализация на пространствените конфигурации и анализ на получените резултати [3]. В това отношение цифровите двойници предоставят възможност за обединяване на геометричното моделиране, числените алгоритми и графичното представяне на

механизма в единна програмна среда [4-6]. Чрез тях могат да се изследват различни пространствени конфигурации, да се проверява работоспособността на изчислителните алгоритми и да се създават предпоставки за последващо разширяване на функционалните възможности на модела [7,8].

Съществено значение при разработването на цифров двойник на платформа на Стюарт има осигуряването на съгласуваност между правата и обратната кинематична задача. Докато обратната задача позволява непосредствено определяне на дължините на линейните актуатори по зададени положение и ориентация на подвижната платформа, правата задача изисква числено решаване на система от нелинейни уравнения [2,9]. Това налага използването на подходящи итерационни методи и проверка на тяхната сходимост и числена точност при различни пространствени конфигурации на механизма [9,10].

Целта на настоящата работа е разработването на цифров двойник на шестстепенна платформа на Стюарт чрез програмна реализация на математически модел за права и обратна кинематика, изграждане на графичен потребителски интерфейс и тримерна визуализация на механизма. Предвидено е числено изследване чрез последователно решаване на двете кинематични задачи за множество тестови конфигурации, с което да се оцени съгласуваността на реализираните алгоритми и точността на възстановяване на зададените пространствени положения и ориентации.

2. РАЗРАБОТВАНЕ НА ЦИФРОВИЯ ДВОЙНИК НА ПЛАТФОРМАТА НА СТЮАРТ

2.1. Архитектура и функционални модули

Разработеният цифров двойник представлява самостоятелно програмно приложение, предназначено за математическо моделиране, кинематичен анализ и тримерна визуализация на платформа на Стюарт. Програмната система е изградена на модулен принцип, като графичният потребителски интерфейс е отделен от изчислителното ядро. Това позволява кинематичните алгоритми да се използват както при интерактивна работа с цифровия модел, така и при автоматизирани числени изследвания. Функционалната архитектура на цифровия двойник е представена на фиг. 1.



Фиг. 1. *Функционална архитектура на цифровия двойник на платформата на Стюарт*

Основните функционални модули изпълняват следните задачи.

Модулът за геометрично моделиране задава конструктивните параметри на механизма, включително координатите на присъединителните точки върху неподвижната основа и подвижната платформа. Той формира геометричните данни, използвани от кинематичното изчислително ядро.

Модулът за кинематични преобразувания реализира математическия модел на платформата на Стюарт, основан на зависимостите за решаване на правата и обратната кинематична задача. Пространствената конфигурация на подвижната платформа се описва чрез шесткомпонентния вектор

$$q = [x,\ y,\ z,\ \varphi,\ \theta,\ \psi]^T,$$

където (x), (y) и (z) са координатите на

положението, а (φ), (θ) и (ψ) са ъглите, определящи ориентацията на подвижната платформа. При решаване на обратната кинематична задача се изчисляват дължините на актуаторите за зададени положение и ориентация на платформата. При правата кинематична задача се използват итерационни числени методи за определяне на шестте компонента на вектора (q) по зададени дължини на актуаторите. В изчислителното ядро са реализирани методът на Нютон, методът на нелинейните най-малки квадрати и аналитично и числено определяне на Якобиановата матрица.

Модулът за тримерна визуализация представя геометричния модел на механизма и изменението на положението и ориентацията на подвижната платформа. В разработеното приложение е използвана интерактивна тримерна визуализация с Matplotlib.

Модулът за представяне на резултатите осигурява таблично извеждане на изчислените дължини на актуаторите и информация за протичането на итерационния процес при решаване на правата кинематична задача. За оценяване на сходимостта се използват разликите между изчислените и зададените дължини на актуаторите. Допълнително се определят показатели, характеризиращи обусловеността на кинематичната задача чрез Якобиановата матрица.

Взаимодействието между функционалните модули позволява последователно задаване на геометрията, решаване на кинематичните задачи и визуализиране на полученото пространствено положение на механизма. Тази организация създава необходимата програмна основа за провеждане на числените изследвания, представени в следващия раздел.

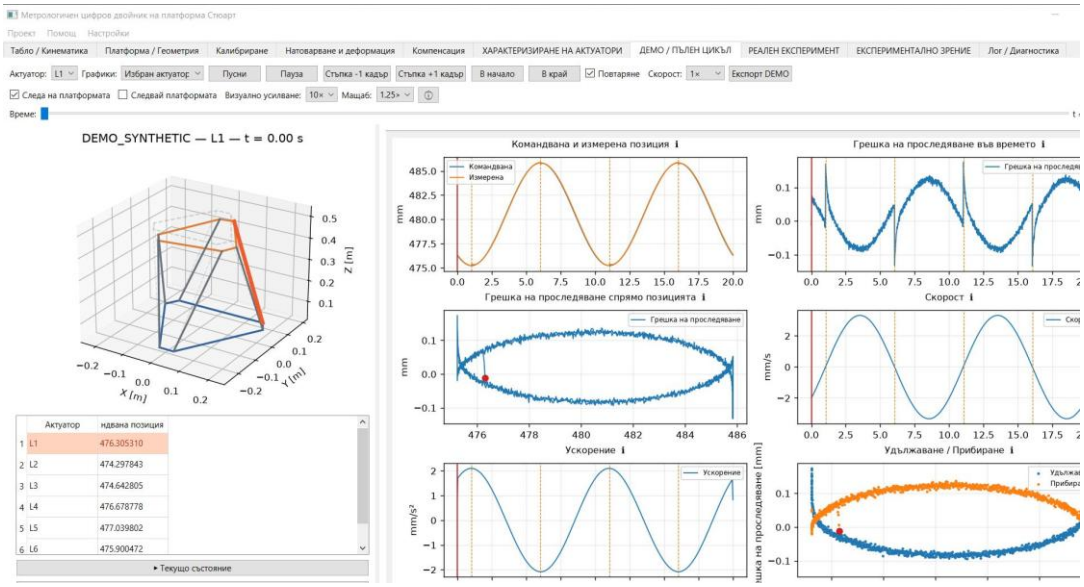
2.2. Програмна реализация и тримерна визуализация

Разработеният математически модел е реализиран в самостоятелно програмно приложение за операционната система Windows. Графичният потребителски интерфейс е разработен с PySide6, а тримерната визуализация на механизма е реализирана с Matplotlib. Приложението позволява задаване и редактиране на геометричните параметри на платформата на Стюарт, решаване на правата и обратната кинематична задача и визуализиране на получените пространствени конфигурации.

При решаване на обратната кинематична задача потребителят задава координатите на положението и ъглите, определящи ориентацията на подвижната платформа. Програмата изчислява съответните дължини на шестте линейни актуатора и представя получената конфигурация в тримерното пространство. При решаване на правата кинематична задача се задават дължините на актуаторите, въз основа на които чрез итерационен числен метод се определят положението и ориентацията на подвижната платформа.

Тримерната визуализация осигурява нагледно представяне на неподвижната основа, подвижната платформа и шестте свързващи ги актуатора. Тя позволява проследяване на изменението на геометричната конфигурация при различни положения и ориентации на механизма.

Графичният потребителски интерфейс на разработения цифров двойник е представен на фиг. 2. В лявата част на работния прозорец са разположени полетата за задаване на координатите на положението и ъглите на ориентацията на подвижната платформа, както и таблица с изчислените дължини на шестте линейни актуатора. В дясната част е визуализиран тримерният геометричен модел на хексапода, включващ неподвижната основа, подвижната платформа и свързващите ги актуатори. Интерфейсът предоставя също информация за обусловеността на Якобиановата матрица и позволява избор на различни функционални режими на програмната система.



Фиг. 2. *Графичен потребителски интерфейс и тримерна визуализация на разработения цифров двойник на платформата на Стюарт*

3. ЧИСЛЕНО ИЗСЛЕДВАНЕ И ПРОВЕРКА НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ МОДЕЛ

3.1. Методика на числено изследване

За проверка на разработения математически модел и неговата програмна реализация е проведено числено изследване, основано на последователното решаване на обратната и правата кинематична задача. Целта е да се оцени съгласуваността между двете кинематични преобразувания и точността, с която зададените положение и ориентация на подвижната платформа се възстановяват чрез разработените изчислителни алгоритми.

Изследването обхваща 1000 тестови конфигурации на платформата на Стюарт. За всяка конфигурация се задава шесткомпонентният вектор.

$$q_{\mathrm{ref}} = [x_{\mathrm{ref}}\ y_{\mathrm{ref}}\ z_{\mathrm{ref}}\ \varphi_{\mathrm{ref}}\ \theta_{\mathrm{ref}}\ \psi_{\mathrm{ref}}]^T, \qquad (1)$$

който определя изходното положение и ориентация на подвижната платформа.

Във формула (1) са въведени следните означения: (x_{ref}), (y_{ref}) и (z_{ref}) са координатите на зададеното положение на подвижната платформа, а (φ_{ref}), (θ_{ref}) и (ψ_{ref}) са ъглите, определящи нейната зададена пространствена ориентация. Индексът „ref“ обозначава референтните стойности, използвани за последващо сравнение с резултатите от числено решаване на правата кинематична задача.

Въз основа на зададената конфигурация чрез обратната кинематична задача се изчисляват дължините на шестте линейни актуатора:

$$L_i = \|t_{\mathrm{ref}} + R_{\mathrm{ref}} P_i - B_i\|,\ i = 0{,}1, \ldots, 5, \quad (2)$$

където L_i е изчислената дължина на i-тия актуатор; t_{ref} е векторът на транслацията, определящ зададеното положение на подвижната платформа спрямо неподвижната координатна система; R_{ref} е ротационната матрица, определяща зададената ориентация на подвижната платформа; P_i и B_i са радиус-векторите на точките на присъединяване на i-тия актуатор съответно към подвижната платформа и неподвижната основа, зададени в техните локални координатни системи.

Получените дължини се използват като входни данни за правата кинематична задача. Чрез итерационно решаване на системата от шест нелинейни уравнения се определя възстановената конфигура-

ция на подвижната платформа:

$$q_{\text{calc}} = [x_{\text{calc}}\ y_{\text{calc}}\ z_{\text{calc}}\ \varphi_{\text{calc}}\ \theta_{\text{calc}}\ \psi_{\text{calc}}]^T, \quad (3)$$

където x_{calc}, y_{calc} и z_{calc} са изчислените координати на положението на подвижната платформа, а φ_{calc}, θ_{calc} и ψ_{calc} а изчислените ъгли, определящи нейната пространствена ориентация. Индексът „calc“ обозначава стойностите, получени при числено решаване на правата кинематична задача.

Числената проверка се извършва чрез сравняване на първоначално зададената и възстановената конфигурация. По този начин се оценяват отклоненията, възникващи при последователното изпълнение на двете кинематични преобразувания.

За оценяване на отклонението в положението се използва евклидовото разстояние между зададените и възстановените координати на началото на подвижната координатна система:

$$e_p = \sqrt{(x_{\text{calc}} - x_{\text{ref}})^2 + (y_{\text{calc}} - y_{\text{ref}})^2 + (z_{\text{calc}} - z_{\text{ref}})^2}. \quad (4)$$

Отклонението в ориентацията се определя чрез относителната матрица на завъртане

$$R_e = R_{\text{ref}}^T R_{\text{calc}}, \quad (5)$$

от която се изчислява ъгълът на относителното завъртане:

$$e_R = \arccos\left(\frac{\text{tr}(R_e)-1}{2}\right). \quad (6)$$

Използването на относителната матрица на завъртане позволява отклонението в ориентацията да се оцени независимо от конкретното представяне на ориентацията чрез ъглите φ, θ и ψ.

За обобщена оценка на числената точност се определят максималното и средноквадратичното отклонение в положението, максималното отклонение в ориентацията, както и броят на успешно решените тестови конфигурации.

3.2. Резултати от численото изследване

Проведеното числено изследване включва 1000 тестови конфигурации, за всяка от които последователно са решени обратната и правата кинематична задача. За всички разгледани конфигурации е получено успешно числено решение. Установените отклонения в положението и ориентацията на подвижната платформа са представени в табл. 1.

Таблица 1. *Резултати от числената проверка на кинематичния модел*

Показател	**Получена стойност**
Брой тестови конфигурации	1000
Успешно решени конфигурации	1000
Максимално отклонение в положението	$9{,}8084 \cdot 10^{-13}$ m
Средноквадратично отклонение в положението	$6{,}4773 \cdot 10^{-14}$ m
Максимално отклонение в ориентацията	$2{,}9802 \cdot 10^{-8}$ rad
Максимален брой итерации	4
Максимален остатък от кинематичните уравнения	$5{,}7536 \cdot 10^{-13}$ m

Получените резултати показват, че при всички разгледани тестови конфигурации изходното положение и ориентация на подвижната платформа са възстановени с много малки числени отклонения. Максималното отклонение в положението е $9{,}8084 \cdot 10^{-13}$m, а средноквадратичното отклонение е $6{,}4773 \cdot 10^{-14}$m. Максималното отклонение в ориентацията е $2{,}9802 \cdot 10^{-8}$rad.

При решаването на правата кинематична задача са необходими не повече от четири итерации за разгледаните тестови конфигурации. Максималната разлика между изчислените и зададените дължини на актуаторите, отчетена като остатък от кинематичните уравнения, е

$$5{,}7536 \cdot 10^{-13}\text{m}.$$

3.3. Анализ на резултатите

Резултатите от числено изследване потвърждават съгласуваността между реализираните алгоритми за права и обратна кинематика в рамките на разгледаните тестови конфигурации. Получените малки отклонения показват, че математическият модел и неговата програмна реализация позволяват възстановяване на зададеното положение и ориентация на подвижната платформа с точност, ограничена практически от числените изчисления.

Успешното решаване на всички 1000 тестови конфигурации и малкият брой итерации показват устойчиво функциониране на използваните итерационни алгоритми в изследваната област. Тези резултати обаче не могат да бъдат обобщени за всички възможни конфигурации на механизма, особено в близост до сингулярни положения.

Следва да се отчете и обстоятелството, че дължините на актуаторите, използвани при правата кинематична задача, са получени чрез обратната кинематика на същия математически модел. Следователно проведеното изследване представлява проверка на числената съгласуваност на кинематичните преобразувания, а не независима експериментална проверка на геометричната точност на механизма.

Получените резултати създават основа за последващо изследване на влиянието на геометричните отклонения и грешките на линейните актуатори върху положението и ориентацията на подвижната платформа, както и за експериментална проверка на разработения цифров двойник.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е разработен цифров двойник на платформа на Стюарт, основан на математически модел за решаване на правата и обратната кинематична задача. Създадено е самостоятелно програмно приложение, което позволява задаване на геометричните параметри на механизма, изчисляване на дължините на линейните актуатори, определяне на положението и ориентацията на подвижната платформа и тримерна визуализация на получените конфигурации.

Проведеното числено изследване с 1000 тестови конфигурации показва съгласуваност между реализираните алгоритми за права и обратна кинематика. За всички разгледани конфигурации е получено успешно числено решение, като максималното отклонение при възстановяване на положението е $9{,}8084 \cdot 10^{-13}$m, а максималното отклонение в ориентацията е $2{,}9802 \cdot 10^{-8}$rad. Получените резултати потвърждават числената точност на разработения модел в изследваната област.

Разработеният цифров двойник създава основа за последващи изследвания на влиянието на геометричните отклонения и грешките на линейните актуатори върху точността на платформата. Предвижда се разширяване на модела с методи за метрологично характеризиране и компенсиране на грешките, както и експериментална проверка на получените резултати.

БЛАГОДАРНОСТИ: *Това изследване е финансирано от университетски проект НИП2026-16.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Stewart, D. A platform with six degrees of freedom. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1965, Vol. 180, No. 1, pp. 371–386. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1965_180_029_02.

[2] Merlet, J.-P. Parallel Robots. 2nd ed. Dordrecht: Springer, 2006. DOI: 10.1007/1-4020-4133-0.

[3] Kim, Y.-S., Shi, H., Dagalakis, N., Marvel, J., Cheok, G. Design of a six-DOF motion tracking system based on a Stewart platform and ball-and-socket joints. Mechanism and Machine Theory, 2019, Vol. 133, pp. 84–94. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.10.021.

[4] Grieves, M., Vickers, J. Digital Twin: Mitigating unpredictable, undesirable emergent behavior in complex systems. In: Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems. Springer, 2017, pp. 85–113. DOI: 10.1007/978-3-319-38756-7_4.

[5] Kritzinger, W., Karner, M., Traar, G., Henjes, J., Sihn, W. Digital Twin in manufacturing: A categorical literature review and classification. IFAC-PapersOnLine, 2018, Vol. 51, No. 11, pp. 1016–1022. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.08.474.

[6] Tao, F., Zhang, H., Liu, A., Nee, A. Y. C. Digital twin in industry: State-of-the-art. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, Vol. 15, No. 4, pp. 2405–2415. DOI: 10.1109/TII.2018.2873186.

[7] Ding, X., Xing, J. Modeling and implementation of a real-time digital twin for the Stewart platform with real-time trajectory computation. PeerJ Computer Science, 2025, Vol. 11, Article e2892. DOI: 10.7717/peerj-cs.2892.

[8] Walica, D., Noskievič, P. Multibody simulation model as part of digital twin architecture: Stewart platform example. IEEE Access, 2024, Vol. 12, pp. 3700–3717. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3349247.

[9] Innocenti, C., Parenti-Castelli, V. Direct position analysis of the Stewart platform mechanism. Mechanism and Machine Theory, 1990, Vol. 25, No. 6, pp. 611–621. DOI: 10.1016/0094-114X(90)90004-4.

[10] McAree, P. R., Daniel, R. W. A fast, robust solution to the Stewart platform forward kinematics. Journal of Robotic Systems, 1996, Vol. 13, No. 7, pp. 407–427. DOI: 10.1002/(SICI)1097-4563(199607)